

К. Эсмераль, Г. В. Розенблюм, Н. Василевский

\mathcal{L} -ИНВАРИАНТНЫЕ МЕРЫ ТИПА ФОКА — КАРЛЕСОНА ДЛЯ ПРОИЗВОДНЫХ ПОРЯДКА k И СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ТЕПЛИЦЕВЫ ОПЕРАТОРЫ

Цель работы — охарактеризовать так называемые горизонтальные меры типа Фока — Карлесона для производных порядка k (k -hFC для краткости) для пространства Фока, а также теплицевы операторы, порожденные заданными ими полуторалинейными формами. Мы введем вещественные копроизводные мер типа k -hFC и покажем, что C^* -алгебра, порожденная теплицевыми операторами с соответствующим классом символов, является коммутативной и изометрически изоморфной некоторой C^* -подалгебре в $L_\infty(\mathbb{R}^n)$. Эти результаты распространяются на меры, инвариантные при сдвигах вдоль лагранжевых плоскостей. Библиография: 13 назв.

Ключевые слова: Теплицев оператор, пространство Фока.

УДК ...

Данная статья была опубликована в ПМА-99 на рус.яз. и J. Math. Sci., vol. 242 (2), 2019 на англ.яз.

1. Введение

При изучении теплицевых операторов в пространствах типа Бергмана возникают определенные алгебраические и аналитические вопросы.

Алгебраические вопросы связаны с описанием алгебр, порожденных теплицевыми операторами с символами из конкретных классов. Один из наиболее важных случаев здесь относится к вопросу о том, будет ли искомая алгебра коммутативной и допускают ли теплицевы операторы, порождающие эту алгебру, одновременную диагонализацию, т.е. существует ли унитарный оператор (свой в каждом частном случае), переводящий все теплицевы операторы в этой алгебре в операторы умножения на некоторые функции (называем их *спектральными функциями*). Конечно, такая диагонализация сразу же выявляет все основные свойства соответствующих теплицевых операторов.

Аналитические вопросы связаны с критериями ограниченности и компактности операторов с символами из заданного класса, с переходом от регулярных к все более и более сингулярным объектам, выполняющим роль символов.

В настоящей статье, затрагивающей оба типа вопросов, преследуются две цели. Во-первых, мы распространяем на многомерный случай конструкцию теплицевых операторов с сильно сингулярными символами и, во-вторых, и это наша главная цель, среди этих сильно сингулярных

Первый автор благодарит университет Кальдас за финансовую поддержку и гостеприимство. Второй автор благодарен Институту Миттаг-Леффлера за поддержку и создание условий для продуктивной работы. Третий автор частично финансово поддержан CONACYT (проект No. 102800), Мексика.

К. Эсмераль: Университет Кальдас, Манисалес, Колумбия, kevin.esmeral@ucaldas.edu.co.

Г. В. Розенблюм: Гетеборгский университет, Университет технологии Чалмерс, Гетеборг, Швеция; Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия grigori@chalmers.se.

Н. Василевский: Cinvestav-IPN, Мехико сити, Мексика, nvaselev@math.cinvestav.mx.

символов мы выявляем классы, которые порождают коммутативные алгебры через теплицевы операторы. Кроме того, мы выпишем явные формулы для спектральных функций этих теплицевых операторов.

Обозначим через $\mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)$ пространство Фока, которое также известно как пространство Сегала — Баргманна (см. [1]–[3]), состоящее из всех целых функций, квадратично интегрируемых относительно $2n$ -мерной меры Гаусса

$$dg_n(z) = (\pi)^{-n} e^{-|z|^2} d\nu_{2n}(z), \quad z \in \mathbb{C}^n,$$

где ν_{2n} — обычная мера Лебега на $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$. Хорошо известно, что $\mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)$ является замкнутым подпространством $L_2(\mathbb{C}^n, dg_n)$ и ортогональным проектором P_n из $L_2(\mathbb{C}^n, dg_n)$ на $\mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)$, называемым *проектом Баргманна*, имеет интегральную форму

$$(P_n f)(z) = \int_{\mathbb{C}^n} f(w) \overline{K_z(w)} dg_n(w), \quad (1.1)$$

где функция $K_z: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ является *воспроизводящим ядром* в точке z ,

$$K_z(w) = e^{\bar{z} \cdot w}, \quad w \in \mathbb{C}^n.$$

Для данной функции $\varphi \in L_\infty(\mathbb{C}^n)$ *теплицев оператор* \mathbf{T}_φ с определяющим символом φ действует на пространстве Фока $\mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)$ по формуле $\mathbf{T}_\varphi f = P_n(f\varphi)$. В силу (1.1) теплицев оператор \mathbf{T}_φ с ограниченной φ представим в виде

$$(\mathbf{T}_\varphi f)(z) = \pi^{-n} \int_{\mathbb{C}^n} f(w) e^{z \cdot \bar{w}} e^{-|w|^2} \varphi(w) d\nu_{2n}(w), \quad z \in \mathbb{C}^n. \quad (1.2)$$

Изралович и Жу [4] обобщили это понятие теплицевых операторов на случай, когда символами являются регулярные борелевские меры μ :

$$\mathbf{T}_\mu f(z) = \pi^{-n} \int_{\mathbb{C}^n} e^{z \cdot \bar{w}} f(w) e^{-|w|^2} d\mu(w), \quad z \in \mathbb{C}^n. \quad (1.3)$$

Если μ — комплексная регулярная борелевская мера, удовлетворяющая *условию* (M), именно,

$$\sup_{z \in \mathbb{C}^n} \int_{\mathbb{C}^n} |K_z(w)|^2 e^{-|w|^2} d|\mu|(w) < \infty, \quad (1.4)$$

то оператор \mathbf{T}_μ , заданный формулой (1.3), корректно определен на плотном подмножестве всех конечных линейных комбинаций воспроизводящих функций в различных точках z . Если μ абсолютно непрерывна относительно обычной меры Лебега, все результаты можно переформулировать в терминах плотности и \mathbf{T}_μ становится теплицевым оператором в классическом смысле (1.2).

Дальнейшее обобщение понятия теплицевых операторов проведено в [5], где Розенблюм и Василевский ввели теплицевы операторы \mathbf{T}_F , определенные ограниченными полуторалинейными формами F в гильбертовом пространстве с воспроизводящим ядром. Этот подход приводит к богатому классу теплицевых операторов, что позволяет считать теплицевыми многие операторы, которые не являются теплицевыми в классическом смысле.

В настоящей статье мы введем горизонтальные (определение 4.1), α -горизонтальные (определение 6.1), \mathcal{L} -инвариантные (определение 7.1) и $\alpha\mathcal{L}$ -инвариантные (определение 7.2) меры типа Фока — Карлесона для производных порядка k в многомерном пространстве Фока и для теплицевых операторов, определенных такими символами, обобщая многие результаты из [6, 5]. Кроме того, мы введем вещественные копроизводные мер Фока — Карлесона и изучим горизонтальные теплицевы операторы, порожденные всеми этими типами мер.

Статья организована следующим образом. В § 2 изложены предварительные сведения: здесь мы вводим обозначения и напоминаем некоторые основные свойства горизонтальных и \mathcal{L} -инвариантных операторов. В § 3 вводятся меры Фока — Карлесона, меры Фока — Карлесона для производных порядка k и теплицевы операторы, порожденные полуторалинейными формами. В § 4 вводятся горизонтальные меры типа Фока — Карлесона и показывается, что теплицев оператор с такой мерой в качестве символа горизонтален тогда и только тогда, когда мера Фока —

Карлесона горизонтальна (теорема 4.1). Затем мы приведем явную формулу для спектральных функций таких теплицевых операторов (теорема 4.2). В § 5 вводятся горизонтальные теплицевы операторы, порожденные мерами типа Фока — Карлесона для производных порядка k . Мы введем вещественные копроизводные мер типа k -ФС и покажем, что теплицев оператор, порожденный такими копроизводными, горизонтален тогда и только тогда, когда горизонтальна мера (теорема 5.1). Затем мы приведем явную формулу для спектральной функции (теорема 5.2). В § 6 мы изучаем меры α -горизонтального типа и показываем, что α -горизонтальная мера является k -ФС для $\mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)$ тогда и только тогда, когда μ_α — мера типа Фока — Карлесона для $\mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)$ (предложение 6.1). Далее мы показываем, что C^* -алгебра, порожденная теплицевыми операторами, заданными вещественным копроизводными $2k$ для мер типа (α, k) -ФС, коммутативна и изометрически изоморфна C^* -субалгебре для $L_\infty(\mathbb{C}^n)$. В § 7 мы обобщаем полученные результаты на случай \mathcal{L} -инвариантных мер. Наконец, в § 8 мы представим основные общие свойства диагонализруемых теплицевых операторов, изучаемых в данной работе.

2. Предварительные сведения

Мы используем стандартные обозначения: $z = x + iy = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, где $x = (\operatorname{Re} z_1, \dots, \operatorname{Re} z_n)$ и $y = (\operatorname{Im} z_1, \dots, \operatorname{Im} z_n)$. Для $z, w \in \mathbb{C}^n$ пишем

$$z \cdot w = \sum_{k=1}^n z_k w_k, \quad z^2 = z \cdot z = \sum_{k=1}^n z_k^2, \quad |z|^2 = z \cdot \bar{z} = \sum_{k=1}^n |z_k|^2.$$

Для любых мультииндекса $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ и $z \in \mathbb{C}^n$ принимаем обычные обозначения:

$$\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!, \quad |\alpha| = \sum_{k=1}^n \alpha_k, \quad \alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha_j \leq \beta_j, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n,$$

$$z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n}, \quad \bar{z}^\alpha = \bar{z}_1^{\alpha_1} \dots \bar{z}_n^{\alpha_n}, \quad \partial^\alpha f = \frac{\partial^{\alpha_1}}{z_1^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial^{\alpha_n}}{z_n^{\alpha_n}} f, \quad \bar{\partial}^\alpha f = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\bar{z}_1^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\bar{z}_n^{\alpha_n}} f.$$

Оператор

$$\mathbf{B}^*: L_2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L_2(\mathbb{C}^n, dg_n),$$

заданный формулой

$$(\mathbf{B}^* f)(z) = \pi^{-n/4} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{\sqrt{2}x \cdot z - \frac{x^2}{2} - \frac{z^2}{2}} dx, \quad z \in \mathbb{C}^n,$$

является изометрическим изоморфизмом из $L_2(\mathbb{R}^n)$ на подпространство $\mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)$ пространства $L_2(\mathbb{C}^n, dg_n)$, известным как *преобразование Барманна*. Его сопряженный оператор

$$\mathbf{B}: L_2(\mathbb{C}^n, dg_n) \longrightarrow L_2(\mathbb{R}^n)$$

имеет вид

$$(\mathbf{B}f)(x) = \pi^{-n/4} \int_{\mathbb{C}^n} f(z) e^{\sqrt{2}x \cdot \bar{z} - \frac{x^2}{2} - \frac{\bar{z}^2}{2}} dg_n(z), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Пример 2.1. Вычислим образ воспроизводящего ядра при обратном преобразовании Барманна, применяя предложение 6.10 из [7] n раз. Получим

$$(\mathbf{B}K_z)(x) = \prod_{j=1}^n \pi^{-1/4} \int_{\mathbb{C}} e^{\bar{z}_j w_j} e^{\sqrt{2}x_j \bar{w}_j - \frac{x_j^2}{2} - \frac{\bar{w}_j^2}{2}} dg(w_j) = (\pi)^{-n/4} e^{\sqrt{2}x \cdot \bar{z} - \frac{x^2}{2} - \frac{\bar{z}^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.1)$$

Напомним, что при заданном $h \in \mathbb{C}^n$ оператор Вейля \mathcal{W}_h определяется на $L_2(\mathbb{C}^n, dg_n)$ как взвешенный оператор сдвига

$$\mathcal{W}_h f(z) = e^{z \cdot \bar{h} - \frac{|h|^2}{2}} f(z - h), \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

Очевидно, что оператор Вейля \mathcal{W}_h унитарен, $\mathcal{W}_{-h} = \mathcal{W}_h^{-1}$ и

$$\mathcal{W}_h K_z(w) = e^{-\bar{z} \cdot h - \frac{h^2}{2}} K_{z+h}(w), \quad w \in \mathbb{C}^n. \quad (2.2)$$

Приведем утверждения (см. подробности в [6]), обобщения которых на случай теплицевых операторов с сингулярными символами составляют основные результаты данной работы.

Линейный оператор $S \in \mathcal{B}(\mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n))$ называется *горизонтальным*, если для каждого $h \in \mathbb{R}^n$ он коммутирует с \mathcal{W}_{ih} , т.е. для каждого $h \in \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{W}_{ih}S = S\mathcal{W}_{ih}.$$

Функция $\varphi \in L_\infty(\mathbb{C}^n)$ называется *горизонтальной*, если для каждого $h \in \mathbb{R}^n$

$$\varphi(\zeta - ih) = \varphi(\zeta), \quad \zeta \in \mathbb{C}^n.$$

Лемма 2.1 ([6, лемма 3.6]). *Функция $\varphi \in L_\infty(\mathbb{C}^n)$ горизонтальна тогда и только тогда, когда существует функция $a \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ такая, что $\varphi(z) = a(\operatorname{Re} z)$ для почти всех $z \in \mathbb{C}^n$.*

Напомним, что преобразование Березина [8] оператора $S \in \mathcal{B}(\mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n))$ задается формулой

$$\tilde{S}(z) = \frac{\langle SK_z, K_z \rangle}{\langle K_z K_z \rangle}, \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

Предложение 2.1 ([6, теорема 3.7]). *Пусть $S \in \mathcal{B}(\mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n))$. Тогда следующие условия эквивалентны.*

1. S горизонтален.
2. Существует $\varphi \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ такая, что $\mathbf{B}S\mathbf{B}^* = M_\varphi$, где M_φ — оператор умножения на φ .
3. Преобразование Березина \tilde{S} является горизонтальной функцией, т.е. $\tilde{S}(z) = b(\operatorname{Re} z)$ для почти всех $z \in \mathbb{C}^n$ с некоторой $b \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$.

Предложение 2.2 ([6, предложение 3.10]). *Если $\varphi \in L_\infty(\mathbb{C}^n)$, то теплицев оператор \mathbf{T}_φ горизонтален тогда и только тогда, когда φ — горизонтальная функция.*

Теорема 2.1 ([6, теорема 3.8]). *Пусть $\varphi(z) = a(\operatorname{Re} z)$ — горизонтальная L_∞ -функция. Тогда теплицев оператор \mathbf{T}_φ унитарно эквивалентен оператору умножения $\mathbf{B}\mathbf{T}_\varphi\mathbf{B}^* = \gamma_a \operatorname{Id}$, где функция $\gamma_a: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ задана формулой*

$$\gamma_a(x) = \pi^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} a\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right) e^{-(x-y)^2} dy, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Напомним также, что симплектическое пространство (V, ω) — это векторное пространство V с симплектической (невырожденной кососимметрической билинейной) формой ω . Стандартной симплектической формой ω_0 в $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$ будет форма $\omega_0(z, w) = \mathbf{J}z \cdot w$, $z, w \in \mathbb{R}^{2n}$, где \mathbf{J} — “стандартная симплектическая матрица”

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix},$$

а 0 и I_n — нулевая и единичная $(n \times n)$ -матрицы.

Далее, n -мерное линейное подпространство \mathcal{L} в \mathbb{R}^{2n} называется *лагранжевой плоскостью* симплектического пространства $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$, если $\omega_0(z, w) = 0$ для любых $z, w \in \mathcal{L}$. Обозначим через $\operatorname{Lag}(2n, \mathbb{R})$ множество всех лагранжевых плоскостей в $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$.

Пример 2.2. Наипростейшими примерами $\mathcal{L} \in \operatorname{Lag}(2n, \mathbb{R})$ являются обе координатные плоскости $\mathcal{L}_x = \mathbb{R}^n \times \{0\}$ и $\mathcal{L}_y = \{0\} \times \mathbb{R}^n$, а также диагональ $\Delta = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}^n\}$.

Множество симплектических вращений $U(2n, \mathbb{R})$ образует подгруппу группы всех линейных автоморфизмов \mathbb{R}^{2n} , состоящую из элементов, сохраняющих стандартную симплектическую форму ω_0 . Кроме того, $U(2n, \mathbb{R})$ изоморфно унитарной группе $U(n, \mathbb{C})$. Таким образом, каждую лагранжеву плоскость \mathcal{L} в \mathbb{R}^{2n} можно отождествить с подпространством в \mathbb{C}^n (которое обозначается тем же символом \mathcal{L}).

Функция $\varphi \in L_\infty(\mathbb{R}^{2n})$ называется инвариантной при *лагранжевых сдвигах* (\mathcal{L} -инвариантной), если для каждого $h \in \mathcal{L}$

$$\varphi(z - h) = \varphi(z), \quad z = (x, y) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Как показано в [6], результаты о горизонтальных теплицевых операторах остаются верными для теплицевых операторов с \mathcal{L} -инвариантными символами).

3. Меры типа k -ФС и теплицевы операторы

В этом параграфе мы обобщаем результаты из [4, 5, 7] о мерах типа Фока–Карлесона, мерах типа Фока — Карлесона для производных порядка k и теплицевых операторах, определенных полуторалинейными формами, на многомерный случай.

3.1. Меры типа Фока — Карлесона. Обозначим через $\text{Borel}(\mathbb{C}^n)$ борелевскую σ -алгебру \mathbb{C}^n и через $\mathfrak{B}_{\text{reg}}(\mathbb{C}^n)$ множество всех *комплексных регулярных* борелевских мер $\mu: \text{Borel}(\mathbb{C}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ с полной вариацией

$$|\mu|(B) = \sup \sum_{n \in \mathbb{N}} |\mu(B_n)|,$$

где супремум берется по всем борелевским разбиениям B_n множества B , которые удовлетворяют следующим условиям:

- $|\mu|$ локально конечна: $|\mu|(\mathcal{K}) < \infty$ для каждого компактного множества $\mathcal{K} \subset \mathbb{C}^n$,
- μ регулярна, т.е.

$$|\mu(A)| = \sup \{|\mu(\mathcal{K})| : \mathcal{K} \text{ — компакт, } \mathcal{K} \subset A\} = \inf \{|\mu(U)| : A \subset U \text{ и } U \text{ открыто}\}.$$

Как было указано в § 1, для $\mu \in \mathfrak{B}_{\text{reg}}(\mathbb{C}^n)$ теплицев оператор \mathbf{T}_μ с определяющим мерой-символом μ имеет интегральное представление

$$(\mathbf{T}_\mu f)(z) = \pi^{-n} \int_{\mathbb{C}^n} e^{z \cdot \bar{w}} f(w) e^{-|w|^2} d\mu(w), \quad z \in \mathbb{C}^n. \quad (3.1)$$

Пусть $\mu \in \mathfrak{B}_{\text{reg}, M}(\mathbb{C}^n)$ — комплексная регулярная борелевская мера, $\mu \in \mathfrak{B}_{\text{reg}}(\mathbb{C}^n)$, удовлетворяющая (1.4). В этом случае интеграл (3.1) сходится и, следовательно, оператор \mathbf{T}_μ корректно определен на плотном подмножестве конечных линейных комбинаций воспроизводящих функций. В частном случае $d\mu = \varphi d\nu$ имеем $\mathbf{T}_\mu = \mathbf{T}_\varphi$ (см. полную библиографию в [4, 7]). С этого момента будем считать, что μ удовлетворяет (1.4).

Хорошо известно, что преобразование Березина функции $\varphi \in L_\infty(\mathbb{C}^n)$ совпадает с преобразованием Березина теплицева оператора \mathbf{T}_φ , которое обозначим $\tilde{\varphi}$. Из интегрального представления (1.2) теплицева оператора \mathbf{T}_φ следует

$$\tilde{\varphi}(z) = \frac{1}{\pi^n} \int_{\mathbb{C}^n} \varphi(w) e^{-|z-w|^2} d\nu_{2n}(w).$$

Это определение было распространено для положительных борелевских мер в [4]:

$$\tilde{\mu}(z) = \pi^{-n} \int_{\mathbb{C}^n} |k_z(w)|^2 e^{-|w|^2} d\mu(w) = \pi^{-n} \int_{\mathbb{C}^n} e^{-|z-w|^2} d\mu(w), \quad z \in \mathbb{C}^n, \quad (3.2)$$

где

$$k_z(w) = K_z(w)(K_z(z))^{-1/2} = e^{w \cdot \bar{z} - \frac{|z|^2}{2}} \quad (3.3)$$

является *нормированным воспроизводящим ядром* $\mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)$. В частности, если \mathbf{T}_μ ограничен на $\mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)$, то $\tilde{\mu}(z) = \langle \mathbf{T}_\mu k_z, k_z \rangle$ для каждого $z \in \mathbb{C}$, т.е. $\tilde{\mu}$ является преобразованием Березина \mathbf{T}_μ .

Определение 3.1 (меры типа Фока — Карлесона). Положительная мера μ называется мерой типа *Фока — Карлесона* для $\mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)$ (кратко, мерой ФС), если существует константа $\omega(\mu) > 0$ такая, что для каждой $f \in \mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)$

$$\int_{\mathbb{C}^n} |f(w)|^2 e^{-|w|^2} d\mu(w) \leq \omega(\mu) \|f\|_{\mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)}^2.$$

Следующий результат предоставляет критерий ограниченности для теплицева оператора \mathbf{T}_μ с положительной мерой μ в качестве определяющего символа. Более подробную информацию можно найти в [4, теоремы 2.3 и 3.1].

Предложение 3.1. Пусть μ — положительная регулярная борелевская мера на \mathbb{C}^n . Тогда следующие условия эквивалентны.

1. Теплицев оператор \mathbf{T}_μ ограничен на $\mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)$.
2. Следующая полуторалинейная форма ограничена в $\mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)$:

$$F(f, g) = \pi^{-n} \int_{\mathbb{C}^n} f(z) \overline{g(z)} e^{-|z|^2} d\mu(z).$$

3. $\tilde{\mu}$ ограничена на \mathbb{C}^n .
4. Для любого фиксированного $\mathbf{r} = (r_j)_{j=1}^n$ при $r_j > 0$ справедливо неравенство $\mu(B_{\mathbf{r}}(z)) < C$ для всех $z \in \mathbb{C}^n$, где $C > 0$ — некоторая константа и $B_{\mathbf{r}}(z)$ обозначает полидиск с центром в z и “радиусом” \mathbf{r} .
5. μ — мера типа Фока — Карлесона.

Доказательство. Здесь мы докажем импликации $1 \Rightarrow 2$ и $2 \Rightarrow 3$, а остальные случаи можно найти в [4, 7].

$1 \Rightarrow 2$. Предположим, что оператор \mathbf{T}_μ ограничен. В силу (1.3) для любых $f, g \in \mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{T}_\mu f, g \rangle &= \pi^{-n} \int_{\mathbb{C}^n} f(w) \langle K_w, g \rangle e^{-|w|^2} d\mu(w) = \pi^{-n} \int_{\mathbb{C}^n} f(w) \overline{\langle g, K_w \rangle} e^{-|w|^2} d\mu(w) \\ &= \pi^{-n} \int_{\mathbb{C}^n} f(w) \overline{g(w)} e^{-|w|^2} d\mu(w) = F(f, g). \end{aligned}$$

Ограниченность \mathbf{T}_μ приводит к требуемому утверждению.

$2 \Rightarrow 3$. Предположим, что полуторалинейная форма F ограничена. Для каждого $z \in \mathbb{C}^n$

$$\tilde{\mu}(z) = \pi^{-n} \int_{\mathbb{C}^n} e^{-|z-w|^2} d\mu(w) = e^{-|z|^2} \int_{\mathbb{C}^n} |e^{\bar{z} \cdot w}|^2 e^{-|w|^2} d\mu(w) = F(k_z, k_z),$$

где k_z — нормированное воспроизводящее ядро в (3.3). Поэтому $\tilde{\mu}(z) \leq \|F\|$. \square

Естественное обобщение — допустить комплекснозначную борелевскую меру μ такую, что ее вариация $|\mu|$ является мерой ФС. В этом случае в качестве побочного продукта предложения 3.1, из результатов [4] следует, что следующие нормы μ эквивалентны.

1. $\|\mu\|_1 = \|\mathbf{T}_\mu\|$.
2. $\|\mu\|_2 = \sup_{z \in \mathbb{C}^n} |\tilde{\mu}(z)|$.
3. $\|\mu\|_3 = \sup_{z \in \mathbb{C}^n} |\mu|(B_{\mathbf{r}}(z))$, где \mathbf{r} — любая фиксированная положительная n -ка.
4. $\|\mu\|_4 = \sup_{\substack{f \in \mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n) \\ \|f\|=1}} \left\{ \int_{\mathbb{C}^n} |f(w)|^2 e^{-|w|^2} d|\mu|(w) \right\}$.

3.2. Меры типа Фока — Карлесона для производных порядка k . Розенблюм и Василевский [5] ввели меры типа Фока — Карлесона для производных порядка $k \in \mathbb{Z}$ (кратко, меры типа k -ФС) для $\mathcal{F}^2(\mathbb{C})$ и установили некоторые основные свойства (теоремы 5.4 и 5.9). Они также ввели теплицевы операторы, определенные *копроизводными* мер k -ФС. Здесь мы распространим эти определения на случай $\mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)$ с помощью мультииндексных обозначений для производных. Приведенные ниже доказательства представляют собой естественные модификации одномерного случая.

Предложение 3.2. Пусть $f \in \mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)$ и $k \in \mathbb{Z}_+^n$. Тогда для каждого $z \in \mathbb{C}^n$,

$$|\partial^k f(z)| \leq C k! \|f\|_{\mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)} \prod_{j=1}^n (1 + (\operatorname{Re} z_j)^2)^{k_j/2} (1 + (\operatorname{Im} z_j)^2)^{k_j/2} e^{\frac{|z_j|^2}{2}},$$

где константа $C > 0$ не зависит от $k \in \mathbb{Z}_+^n$.

Доказательство. Пусть $f \in \mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)$ и $k \in \mathbb{Z}_+^n$. Для каждого $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ в силу интегрального представления Коши для нескольких комплексных переменных для любого полидиска $S_{z, \mathbf{r}} = S_{z_1, r_1} \times S_{z_2, r_2} \times \dots \times S_{z_n, r_n}$ (где $S_{z_k, r_k} = \{w_k \in \mathbb{C} : |w_k - z_k| < r_k\}$) и любого $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)$ with $r_j > 0$ справедливо следующее равенство:

$$\partial^k f(z) = (2i\pi)^{-n} k! \int_{\partial S_{z, \mathbf{r}}} f(\zeta) \prod_{j=1}^n \frac{d\zeta_j}{(\zeta_j - z_j)^{k_j+1}}.$$

Поэтому, поскольку $(r_j + |z_j|) - |\zeta_j| \geq 0$ для любых $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_j) \in S_{z, \mathbf{r}}$,

$$\begin{aligned} |\partial^k f(z)| &\leq (2\pi)^{-n} k! \int_{\partial S_{z, \mathbf{r}}} |f(\zeta)| \prod_{j=1}^n \frac{d\zeta_j}{|z_j - \zeta_j|^{k_j+1}} \\ &\leq (2\pi)^{-n} k! \prod_{j=1}^n r_j^{-(k_j+1)} \int_{\partial S_{z, \mathbf{r}}} |f(\zeta)| \prod_{j=1}^n e^{\frac{(r_j + |z_j|)^2 - |\zeta_j|^2}{2}} d\zeta_j \\ &\leq (2\pi)^{-n} k! \left(\prod_{j=1}^n r_j^{-(k_j+1)} e^{\frac{(r_j + |z_j|)^2}{2}} (\pi r_j^2)^{1/2} \right) \left(\int_{\partial S_{z, \mathbf{r}}} |f(\zeta)|^2 e^{-|\zeta|^2} d\zeta \right)^{1/2} \\ &\leq 2^{-n} \pi^{-n/2} k! \|f\|_{\mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)} \prod_{j=1}^n r_j^{-k_j} e^{\frac{(r_j + |z_j|)^2}{2}}. \end{aligned}$$

Полагая $r_j = (1 + x_j^2)^{-1/2} (1 + y_j^2)^{-1/2}$ и $z_j = x_j + iy_j$, получаем

$$\begin{aligned} |\partial^k f(z)| &\leq 2^{-n} \pi^{-n/2} k! \|f\|_{\mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)} \prod_{j=1}^n (1 + x_j^2)^{k_j/2} (1 + y_j^2)^{k_j/2} e^{\frac{[1 + (1 + x_j^2)^{1/2} (1 + y_j^2)^{1/2} |z_j|]^2}{2(1 + x_j^2)(1 + y_j^2)}} \\ &= 2^{-n} \pi^{-n/2} k! \|f\|_{\mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)} \prod_{j=1}^n (1 + x_j^2)^{k_j/2} (1 + y_j^2)^{k_j/2} e^{\frac{1}{2(1 + x_j^2)(1 + y_j^2)} + \frac{|z_j|}{(1 + x_j^2)^{1/2} (1 + y_j^2)^{1/2}} + \frac{|z_j|^2}{2}}. \end{aligned}$$

Теперь, поскольку

$$\frac{|z_j|}{(1 + x_j^2)^{1/2} (1 + y_j^2)^{1/2}} \leq \sqrt{\frac{(x_j^2 + 1) + (y_j^2 + 1)}{(1 + x_j^2)(1 + y_j^2)}} \leq \sqrt{2}$$

и

$$\frac{1}{2(1 + x_j^2)(1 + y_j^2)} \leq \frac{1}{2},$$

имеем

$$|\partial^k f(z)| \leq 2^{-n} \pi^{-n/2} e^{\frac{2\sqrt{2}+1}{2}} k! \|f\|_{\mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)} \prod_{j=1}^n (1 + x_j^2)^{k_j/2} (1 + y_j^2)^{k_j/2} e^{\frac{|z_j|^2}{2}}.$$

Предложение доказано. \square

Определение 3.2 (меры k -FC). Пусть $k \in \mathbb{Z}_+^n$. Положительная регулярная борелевская мера μ называется мерой типа Фока — Карлесона для производных порядка k (кратко, k -FC) для $\mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)$, если существует $\omega_k(\mu) > 0$ такое, что для каждой $f \in \mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)$

$$\int_{\mathbb{C}^n} |\partial^k f(w)|^2 e^{-|w|^2} d\mu(w) \leq \omega_k(\mu) \int_{\mathbb{C}^n} |f(w)|^2 e^{-|w|^2} d\nu_{2n}(w). \quad (3.4)$$

Если $|k| = 0$, то любая мера типа 0-FC есть в точности мера FC для $\mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)$. Комплексная регулярная борелевская мера называется k -FC, если (3.4) выполнено для $|\mu|$ вместо μ .

Обозначим через μ_p борелевскую меру на \mathbb{C}^n , заданную формулой

$$\mu_p(B) = \int_B \prod_{j=1}^n (1 + x_j^2)^{p_j} (1 + y_j^2)^{p_j} d\mu(x + iy), \quad B \subset \mathbb{C}^n. \quad (3.5)$$

Следующий результат связывает меры k -ФС и меры типа Фока — Карлесона для $\mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)$. Доказательство почти дословно повторяет соответствующие доказательства из [5, теорема 5.4 и следствие 5.5]. Достаточно заменить предложение 5.1 в [5] на предложение 3.2 выше и взять произведение решеток, использованных в доказательстве теоремы 5.4 из [5].

Предложение 3.3. Пусть $k \in \mathbb{Z}_+^n$. Положительная мера μ является мерой типа k -ФС тогда и только тогда, когда для некоторого (и, следовательно, любого) $\mathbf{r} > 0$ следующая величина конечна:

$$C_k(\mu, \mathbf{r}) = (k!)^2 \sup_{z \in \mathbb{C}^n} \mu_k(B_{\mathbf{r}}(z)).$$

Для фиксированного \mathbf{r} константу $\omega_k(\mu)$ в (3.4) можно взять в виде $\omega_k(\mu) = C(\mathbf{r})C_k(\mu, \mathbf{r})$, где $C(\mathbf{r})$ зависит только от \mathbf{r} . Для комплексной меры μ выполнена часть “тогда”.

Замечание 3.1. Явная зависимость константы от k была решающим фактором в [5], где рассматривались символы, включающие производные неограниченного порядка. Наша формулировка ориентирована на изучение таких общих символов в будущих публикациях.

Предложение 3.4. Для любых $p, k \in \mathbb{Z}_+^n$ положительная борелевская мера μ является мерой типа k -ФС тогда и только тогда, когда мера μ_{k-p} является мерой типа p -ФС. Кроме того, $C_{k-p}(\mu_p, \mathbf{r}) = C_k(\mu, \mathbf{r})$.

Понятие меры типа k -ФС можно обобщить на случай полуцелых положительных мультииндексов k с помощью (3.5) и предложения 3.4.

Определение 3.3 (меры k -ФС: расширенная версия). Если $k \in (\mathbb{Z}_+/2)^n$, то будем говорить, что μ — мера типа k -ФС при условии, что величина

$$C_k(\mu) = (k!)^2 \sup_{z \in \mathbb{C}^n} |\mu_k|(B_{\sqrt{n}}(z))$$

конечна. Здесь $B_{\sqrt{n}}(z)$ обозначает полидиск в \mathbb{C}^n с центром в $z = (z_1, \dots, z_n)$ и радиусом $\mathbf{r} = \sqrt{n} := (1, 1, \dots, 1)$, $|\sqrt{n}| = \sqrt{n}$ (такой радиус выбран здесь лишь для удобства).

Пример 3.1. Заметим, что любая мера с компактным носителем является мерой типа k -ФС для каждого k . С другой стороны, при заданном $k \in (\mathbb{Z}_+/2)^n$ борелевская мера

$$d\mu(z) = \prod_{j=1}^n \frac{dx_j dy_j}{(1 + x_j^2)^{k_j} (1 + y_j^2)^{k_j}}$$

является в силу предложения 3.4 мерой типа k -ФС для $\mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)$. Действительно,

$$\mu_k(B) = \int_B \prod_{j=1}^n (1 + x_j^2)^{k_j} (1 + y_j^2)^{k_j} d\mu(x + iy) = \nu_{2n}(B)$$

для каждого борелевского множества $B \subset \mathbb{C}^n$. Здесь $\mu_k = \nu_{2n}$ — обычная мера Лебега на \mathbb{C}^n . Поэтому μ_k — мера типа Фока — Карлесона для $\mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)$.

3.3. Теплицевы операторы, порожденные мерами k -ФС. Теплицевы операторы, порожденные ограниченными полуторалинейными формами F на $\mathcal{F}^2(\mathbb{C})$ были введены в [5]. Предложенный там подход заключается в следующем (см. подробности в [5]).

Пусть \mathcal{H} — гильбертово пространство функций, определенных в области $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, и \mathcal{A} — гильбертово пространство с воспроизводящим ядром, являющееся подпространством \mathcal{H} с воспроизводящей функцией K_z в точке $z \in \Omega$. Ортогональная проекция P_n из \mathcal{H} на \mathcal{A} имеет вид $(P_n f)(z) = \langle f, K_z \rangle$.

Пусть $F(\cdot, \cdot)$ — ограниченная полуторалинейная форма в \mathcal{A} . Тогда по теореме Рисса об ограниченных полуторалинейных формах существует единственный ограниченный линейный оператор

\mathbf{T} в \mathcal{A} такой, что $F(f, g) = \langle \mathbf{T}f, g \rangle$ для всех $f, g \in \mathcal{A}$. Далее, теплицев оператор \mathbf{T}_F , порожденный ограниченной полуторалинейной формой F и действующий на \mathcal{A} , определяется следующим образом:

$$(\mathbf{T}_F f)(z) = F(f, K_z) = \langle \mathbf{T}f, K_z \rangle = (\mathbf{T}f)(z), \quad z \in \Omega. \quad (3.6)$$

Далее предположим, что $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{C}^n, e^{-|w|^2} d\nu_{2n}(w))$ и $\mathcal{A} = \mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)$. Наша цель состоит в рассмотрении теплицевых операторов, порожденных полуторалинейными формами, заданными мерами типа k -FC для $\mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)$.

Пусть μ — мера типа k -FC для $\mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)$, где $k \in (\mathbb{Z}_+/2)^n$. Для $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$ таких, что $2k = \alpha + \beta$, мы обобщим на n -мерный случай определение копроизводной $\partial^\alpha \bar{\partial}^\beta \mu$, введенное в [5], следующим образом: для функции $h = f\bar{g} \in L_1(\mathbb{C}^n, e^{-|w|^2} d\nu_{2n}(w))$, $f, g \in \mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)$,

$$(\partial^\alpha \bar{\partial}^\beta \mu, h) = (-1)^{\alpha+\beta} (\mu G, \partial^\alpha \bar{\partial}^\beta h) = (\mu G, \partial^\alpha f \bar{\partial}^\beta \bar{g}), \quad G(z) = e^{-|z|^2}$$

(где (\cdot, \cdot) — внутреннее спаривание между мерами и функциями), при условии, что правая часть имеет смысл.

Полуторалинейная форма $F_{\mu, \alpha, \beta}$ на $\mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)$, ассоциированная с копроизводной $\partial^\alpha \bar{\partial}^\beta \mu$, задается формулой

$$F_{\mu, \alpha, \beta}(f, g) = (\partial^\alpha \bar{\partial}^\beta \mu, f\bar{g}) = \pi^{-n} \int_{\mathbb{C}^n} \partial^\alpha f(z) \bar{\partial}^\beta \bar{g}(z) e^{-|z|^2} d\mu(z). \quad (3.7)$$

Для $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$, $k \in (\mathbb{Z}_+/2)^n$, $2k = \alpha + \beta$, и копроизводной $\partial^\alpha \bar{\partial}^\beta \mu$ меры μ типа k -FC определим теплицев оператор $\mathbf{T}_{\partial^\alpha \bar{\partial}^\beta \mu}$ как теплицев оператор, порожденный полуторалинейной формой (3.7) посредством (3.6), т.е. для $f \in \mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)$

$$(\mathbf{T}_{\partial^\alpha \bar{\partial}^\beta \mu} f)(z) = F_{\mu, \alpha, \beta}(f, K_z) = \pi^{-n} z^\beta \int_{\mathbb{C}^n} \partial^\alpha f(w) e^{z \cdot \bar{w}} e^{-|w|^2} d\mu(w).$$

Далее введем преобразование Березина копроизводных $\partial^\alpha \bar{\partial}^\beta \mu$ меры типа k -FC по формуле

$$\widetilde{\partial^\alpha \bar{\partial}^\beta \mu}(z) = z^\beta \bar{z}^\alpha \int_{\mathbb{C}^n} e^{-|z-w|^2} d\mu(w), \quad z \in \mathbb{C}^n. \quad (3.8)$$

Если теплицев оператор $\mathbf{T}_{\partial^\alpha \bar{\partial}^\beta \mu}$ ограничен, то $\widetilde{\partial^\alpha \bar{\partial}^\beta \mu} = \widetilde{\mathbf{T}_{\partial^\alpha \bar{\partial}^\beta \mu}}$, т.е.

$$\widetilde{\partial^\alpha \bar{\partial}^\beta \mu}(z) = \frac{\langle \mathbf{T}_{\partial^\alpha \bar{\partial}^\beta \mu} K_z, K_z \rangle}{\langle K_z, K_z \rangle} = e^{-|z|^2} F_{\mu, \alpha, \beta}(k_z, k_z), \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

Доказательство следующего результата дословно повторяет доказательство предложения 6.4 из [5], потребуются лишь заменить следствие 5.5 из [5] на предложение 3.4.

Предложение 3.5. Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$ и $k \in (\mathbb{Z}_+/2)^n$ такие, что $\alpha + \beta = 2k$. Если $\mu \in \mathfrak{B}_{\text{reg}}(\mathbb{C}^n)$ — положительная мера типа k -FC для $\mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)$, то соответствующая полуторалинейная форма $F_{\mu, \alpha, \beta}$, определенная в (3.7), ограничена.

Замечание 3.2. Пусть μ — мера k -FC для $\mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)$ и μ_R — мера, полученная из μ сужением на внешность шара радиуса R с центром в 0. Заметим, что в силу предложения 3.5 теплицев оператор $\mathbf{T}_{\partial^\alpha \bar{\partial}^\beta \mu}$ ограничен; кроме того, если константа $C_k(\mu_R) \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$, то $\mathbf{T}_{\partial^\alpha \bar{\partial}^\beta \mu}$ компактен.

Если $\mu \in \mathfrak{B}_{\text{reg}}(\mathbb{C}^n)$ — положительная мера типа k -FC для $\mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)$, то в силу предложения 3.5 существует единственный ограниченный оператор $\mathbf{A}_{\alpha, \beta}$ такой, что $F_{\mu, \alpha, \beta}(f, g) = \langle \mathbf{A}_{\alpha, \beta} f, g \rangle$ для любых $f, g \in \mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)$. Теплицев оператор $\mathbf{T}_{\partial^\alpha \bar{\partial}^\beta \mu}$ ограничен, поскольку $F_{\mu, \alpha, \beta}$ ограничен и $\mathbf{A}_{\alpha, \beta} = \mathbf{T}_{\partial^\alpha \bar{\partial}^\beta \mu}$. В действительности, для каждого $g \in \mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)$ ввиду свойства воспроизведения и дифференцирования под знаком интеграла для всех $z \in \mathbb{C}^n$

$$\partial^\alpha g(z) = \pi^{-n} \int_{\mathbb{C}^n} g(w) \bar{w}^\alpha e^{z \cdot \bar{w}} e^{-|w|^2} d\nu_{2n}(w). \quad (3.9)$$

Таким образом, по теореме Фубини, (3.7) и (3.9) для любых $f, g \in \mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{T}_{\partial^\alpha \bar{\partial}^\beta \mu} f, g \rangle &= \pi^{-n} \int_{\mathbb{C}^n} \left(\pi^{-n} z^\beta \int_{\mathbb{C}^n} \partial^\alpha f(w) e^{z \cdot \bar{w}} e^{-|w|^2} d\mu(w) \right) \overline{g(z)} e^{-|z|^2} d\nu_{2n}(z) \\ &= \pi^{-n} \int_{\mathbb{C}^n} \partial^\alpha f(w) \overline{\left(\pi^{-n} \int_{\mathbb{C}^n} \bar{z}^\beta e^{w \cdot \bar{z}} g(z) e^{-|z|^2} d\nu_{2n}(z) \right)} e^{-|w|^2} d\mu(w) \\ &= \pi^{-n} \int_{\mathbb{C}^n} \partial^\alpha f(w) \overline{\partial^\beta g(w)} e^{-|w|^2} d\mu(w) = F_{\mu, \alpha, \beta}(f, g). \end{aligned} \quad (3.10)$$

4. Горизонтальные теплицевы операторы с мерами типа FC в качестве символов

Для заданной комплексной регулярной борелевской меры $\varrho \in \mathfrak{B}_{\text{reg}}(\mathbb{R}^n)$ обозначим через $\mu = \varrho \otimes \eta$ тензорное произведение мер ϱ и η на \mathbb{R}^n , т.е. $\mu(A \times B) = \varrho(A)\eta(B)$ для любых $A, B \in \text{Borel}(\mathbb{R}^n)$ с обычным продолжением на все борелевские множества в \mathbb{R}^{2n}

Определение 4.1 (горизонтальные меры). Будем говорить, что $\mu \in \mathfrak{B}_{\text{reg}}(\mathbb{C}^n)$ *горизонтальна*, если $\mu = \varrho \otimes \nu_n$ для некоторого $\varrho \in \mathfrak{B}_{\text{reg}}(\mathbb{R}^n)$, где ν_n — мера Лебега на \mathbb{R}^n . Кроме того, если $\mu = \varrho \otimes \nu_n$ — мера типа FC для $\mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)$, будем говорить, что μ — мера hFC.

Следующее утверждение аналогично свойству инъективности преобразования Березина теплицевых операторов \mathbf{T}_μ с мерами типа FC в качестве символов. Хотя для ближайших целей достаточно доказать лемму при $|k| = 0$, мы допускаем любое $k \in (\mathbb{Z}_+/2)^n$, что потребуется ниже в теореме 5.1.

Лемма 4.1. Пусть $k \in (\mathbb{Z}_+/2)^n$ и $\mu \in \mathfrak{B}_{\text{reg}}(\mathbb{C}^n)$ — комплексная мера, удовлетворяющая условию (M) (см. (1.4)). Если

$$(\text{Re } z)^{2k} \int_{\mathbb{C}^n} e^{-|z-w|^2} d\mu(w) = 0 \quad \text{или} \quad (\text{Im } z)^{2k} \int_{\mathbb{C}^n} e^{-|z-w|^2} d\mu(w) = 0$$

для любых $z \in \mathbb{C}^n$, то μ — нулевая мера.

Доказательство. Предположим, что

$$(\text{Re } z)^{2k} \int_{\mathbb{C}^n} e^{-|z-w|^2} d\mu(w) = 0$$

для всех $z \in \mathbb{C}^n$. Пусть $\Psi: \mathbb{C}^n \times \overline{\mathbb{C}^n} \rightarrow \mathbb{C}$ — отображение вида

$$\Psi(z, w) = \sum_{\beta \leq 2k} \binom{2k}{\beta} \int_{\mathbb{C}^n} w^{2k-\beta} e^{w \cdot \zeta} z^\beta e^{z \cdot \bar{\zeta}} e^{-|\zeta|^2} d\mu(\zeta) = (w+z)^{2k} \int_{\mathbb{C}^n} e^{w \cdot \zeta} e^{z \cdot \bar{\zeta}} e^{-|\zeta|^2} d\mu(\zeta).$$

Заметим, что для любого треугольника Δ в \mathbb{C}^n согласно теореме Фубини

$$\int_{\partial \Delta} \Psi(z, w) dz = \sum_{\beta \leq 2k} \binom{2k}{\beta} \int_{\mathbb{C}^n} w^{2k-\beta} e^{w \cdot \zeta} \left(\int_{\partial \Delta} z^\beta e^{z \cdot \bar{\zeta}} dz \right) d\mu(\zeta) = 0,$$

$$\int_{\partial \Delta} \Psi(z, w) dw = \sum_{\beta \leq 2k} \binom{2k}{\beta} \int_{\mathbb{C}^n} z^\beta e^{z \cdot \bar{\zeta}} \left(\int_{\partial \Delta} w^{2k-\beta} e^{w \cdot \zeta} dw \right) d\mu(\zeta) = 0.$$

Таким образом, в силу теоремы Хартогса Ψ — аналитическая функция в $\mathbb{C}^n \times \overline{\mathbb{C}^n}$ и

$$\Psi(z, \bar{z}) = e^{|z|^2} 2^{|2k|} (\text{Re } z)^{2k} \int_{\mathbb{C}^n} e^{-|\zeta-z|^2} d\mu(\zeta) = 0.$$

Тогда в силу [9, предложение 1.69] имеем $\Psi \equiv 0$. Поэтому функция $\Phi: \mathbb{C}^n \times \overline{\mathbb{C}^n} \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\Phi(z, w) = \int_{\mathbb{C}} e^{z \cdot \zeta} e^{w \cdot \zeta} e^{-|\zeta|^2} d\mu(\zeta),$$

удовлетворяет $\Phi(z, w) = 0$ для всех $z \neq -w$. Однако из тех же рассуждений для Ψ следует, что функция Φ аналитическая в $\mathbb{C}^n \times \overline{\mathbb{C}^n}$ и поэтому непрерывна. Таким образом, $\Phi \equiv 0$ в $\mathbb{C}^n \times \overline{\mathbb{C}^n}$. В частности, если $d\zeta(u, v) = e^{-|u+iv|^2} d\mu(u+iv)$, то для любых $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} e^{-i(x, y) \cdot (u, v)} d\zeta(u, v) &= \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} e^{(-y+ix) \cdot (u+iv) + (y+ix) \cdot (u-iv)} d\zeta(u, v) \\ &= \int_{\mathbb{C}^n} e^{(-y+ix) \cdot \zeta + (y+ix) \cdot \bar{\zeta}} e^{-|\zeta|^2} d\mu(\zeta) = \Phi(y+ix, -y+ix) = 0, \end{aligned}$$

т.е. преобразование Фурье — Стильеса ограниченной комплексной меры ς в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ равно 0. Таким образом, $\varsigma \equiv 0$ в силу инъективности преобразования Фурье — Стильеса (см. [10, предложение 3.8.6]) и, следовательно, $\mu \equiv 0$.

Далее, если

$$(\operatorname{Im} z)^{2k} \int_{\mathbb{C}^n} e^{-|z-w|^2} d\mu(w) = 0$$

для любых z in \mathbb{C}^n , то доказательство почти дословно повторяет сказанное выше, надо лишь заменить Ψ функцией

$$\psi(z, w) = \sum_{\beta \leq 2k} \binom{2k}{\beta} (-1)^\beta \int_{\mathbb{C}^n} w^{2k-\beta} e^{w \cdot \zeta} z^\beta e^{z \cdot \bar{\zeta}} e^{-|\zeta|^2} d\mu(\zeta) = (w-z)^{2k} \int_{\mathbb{C}^n} e^{w \cdot \zeta} e^{z \cdot \bar{\zeta}} e^{-|\zeta|^2} d\mu(\zeta).$$

Лемма доказана. \square

Лемма 4.2. Пусть ϱ — комплексная регулярная мера на \mathbb{R}^n такая, что $\mu = \varrho \otimes \nu_n \in \mathfrak{B}_{\text{reg}, M}(\mathbb{C}^n)$. Тогда для каждого $z = x + iy \in \mathbb{C}^n$

$$\int_{\mathbb{C}^n} e^{-|z-w|^2} d\mu(w) = \pi^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(t-x)^2} d\varrho(t). \quad (4.1)$$

Доказательство. Пусть $z = x + iy \in \mathbb{C}^n$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{C}^n} e^{-|z-w|^2} d\mu(w) &= \int_{\mathbb{C}^n} e^{-|x+iy-w|^2} d\mu(w) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|(x-t)+i(y-v)|^2} d\varrho(t) d\nu_n(v) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x-t)^2 - (y-v)^2} d\varrho(t) d\nu_n(v) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-(y-v)^2} d\nu_n(v) \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x-t)^2} d\varrho(t) \right) \\ &= \pi^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x-t)^2} d\varrho(t). \end{aligned}$$

Лемма доказана. \square

Теорема 4.1 (критерий для hFC мер). Пусть μ — положительная мера FC для $\mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)$. Тогда следующие условия эквивалентны.

1. \mathbf{T}_μ горизонтален.
2. $\tilde{\mu}$ зависит только от $\operatorname{Re} z$.
3. μ инвариантна при горизонтальных сдвигах, т.е. $\mu(X + ih) = \mu(X)$ для каждого борелевского множества $X \subset \mathbb{C}^n$ и каждого $h \in \mathbb{R}^n$.
4. $\mu(Y \times (Z + h)) = \mu(Y \times Z)$ для всех борелевских множеств $Y, Z \subset \mathbb{R}^n$ и каждого $h \in \mathbb{R}^n$.
5. μ — горизонтальная мера, т.е. существует $\varrho \in \mathfrak{B}_{\text{reg}}(\mathbb{R}^n)$ такая, что $\mu = \varrho \otimes \nu_n$.

Доказательство. $1 \Leftrightarrow 2$. Если μ — мера FC для $\mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)$, то теплицев оператор \mathbf{T}_μ ограничен. Поэтому в силу предложения 2.1 этот оператор горизонтален тогда и только тогда, когда соответствующее преобразование Березина зависит только от $\operatorname{Re} z$.

$2 \Rightarrow 3$. Пусть $h \in \mathbb{R}^n$, $X \in \operatorname{Borel}(\mathbb{C}^n)$. Положим $\mu_h(X) = \mu(X + ih)$. Для каждого $z \in \mathbb{C}^n$

$$\widetilde{\mu}_h(z) = \int_{\mathbb{C}^n} e^{-|z-w|^2} d\mu(w + ih) = \int_{\mathbb{C}^n} e^{-|(z+ih)-w|^2} d\mu(w) = \widetilde{\mu}_h(z + ih)$$

для любых $f \in \mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)$. Поэтому для каждого $z \in \mathbb{C}^n$

$$\widetilde{\lambda}_h(z) = \int_{\mathbb{C}^n} e^{-|z-w|^2} d\lambda_h(w) = 0,$$

где $\lambda_h = \mu_h - \mu$. Это знакопеременная мера такая, что $|\lambda_h|(B) \leq |\mu_h|(B) + |\mu|(B)$ для всех $B \in \operatorname{Borel}(\mathbb{C}^n)$, $|\lambda_h|$ удовлетворяет условию (M) и для каждой $f \in \mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{C}^n} |f(z)|^2 e^{-|z|^2} d|\lambda_h|(z) &\leq \int_{\mathbb{C}^n} |f(z)|^2 e^{-|z|^2} d|\mu_h|(z) + \int_{\mathbb{C}^n} |f(z)|^2 e^{-|z|^2} d|\mu|(z) \\ &= \int_{\mathbb{C}^n} |f(z - ih)|^2 e^{-|z - ih|^2} d|\mu|(z) + \omega(\mu) \|f\|^2 = \int_{\mathbb{C}^n} |e^{ih \cdot z + \frac{h^2}{2}} \mathcal{W}_{ih} f(z)|^2 e^{-|z - ih|^2} d|\mu|(z) + \omega(\mu) \|f\|^2 \\ &= \int_{\mathbb{C}^n} |e^{ih \cdot z}|^2 e^{h^2} |\mathcal{W}_{ih} f(z)|^2 e^{-(|z|^2 + z \cdot ih - ih \cdot \bar{z} + h^2)} d|\mu|(z) + \omega(\mu) \|f\|^2 = \omega(\mu) \|\mathcal{W}_{-ih} f\|^2 + \omega(\mu) \|f\|^2. \end{aligned}$$

Так как \mathcal{W}_{-ih} унитарен на пространстве Фока, это показывает, что λ_h — мера FC для $\mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)$. Тогда в силу леммы 4.1 с $|k| = 0$ мы видим, что λ_h — нулевая мера, т.е. для каждого борелевского множества $X \subset \mathbb{C}^n$ имеем $\mu(X + ih) = \mu(X)$ для каждого $h \in \mathbb{R}^n$.

$3 \Rightarrow 4$. Импликация очевидна.

$4 \Rightarrow 5$. Предположим, что $\mu(Y \times (Z + h)) = \mu(Y \times Z)$ для любых борелевских множеств $Y, Z \in \operatorname{Borel}(\mathbb{R}^n)$ и каждого $h \in \mathbb{R}^n$. Определим отображение $\Psi_Y: \operatorname{Borel}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, +\infty]$ формулой $\Psi_Y(Z) = \mu(Y \times Z)$. Легко видеть, что Ψ_Y — мера на \mathbb{R}^n такая, что $\Psi_Y(C) < +\infty$ для любого компактного подмножества C в \mathbb{R}^n , поскольку μ регулярна. Следовательно, Ψ_Y регулярна в силу [11, теорема 2.18]. Кроме того, Ψ_Y инвариантна при сдвигах. Следовательно, Ψ_Y пропорциональна мере Лебега [11, § 2.20, теорема (d)], т.е. существует число $\varrho(Y)$ такое, что $\mu(Y \times Z) = \varrho(Y) \nu_n(Z)$ для каждого $Z \in \operatorname{Borel}(\mathbb{R}^n)$. Тогда ϱ — положительная регулярная борелевская мера на \mathbb{R}^n , поскольку $\mu(Y \times [0, 1]^n) = \varrho(Y)$ для каждого множества $Y \in \operatorname{Borel}(\mathbb{R}^n)$. Поэтому μ горизонтальна.

$5 \Rightarrow 1$. Если $\mu = \varrho \otimes \nu_n$ — мера типа hFC для $\mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)$, то в силу (3.2) и леммы 4.2 преобразование Березина $\tilde{\mu}$ теплицева оператора \mathbf{T}_μ имеет вид

$$\tilde{\mu}(z) = \pi^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x-u)^2} d\varrho(u). \quad (4.2)$$

Поэтому в силу предложения 2.1 теплицев оператор \mathbf{T}_μ горизонтален. \square

Так как комплексная регулярная борелевская мера μ является мерой типа FC тогда и только тогда, когда ее вариация $|\mu|$ является мерой FC, теорема 4.1 остается справедливой для такого типа мер. Далее мы покажем, что каждый теплицев оператор с горизонтальной мерой в качестве символа унитарно эквивалентен оператору умножения на некоторую функцию из $L_\infty(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 4.2 (диагонализация теплицевых операторов). *Пусть $\mu = \varrho \otimes \nu_n$ — мера hFC для $\mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)$. Тогда теплицев оператор \mathbf{T}_μ унитарно эквивалентен оператору $\mathbf{B} \mathbf{T}_\mu \mathbf{B}^* = \gamma_\varrho \operatorname{Id}$, где функция $\gamma_\varrho: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ задана формулой*

$$\gamma_\varrho(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x-\sqrt{2}y)^2} d\varrho(y), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Доказательство. Пусть $S = \mathbf{B}^* M_{\gamma_\varrho} \mathbf{B}$. Тогда в силу (2.1), (3.3) и теоремы Тонелли простыми вычислениями получаем, что для каждого $z = u + iv \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \tilde{S}(u + iv) &= \langle \mathbf{B}^* M_{\gamma_\varrho} \mathbf{B} k_{u+iv} k_{u+iv} \rangle = \frac{2^{n/2}}{\pi^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x-\sqrt{2}y)^2} e^{-(\sqrt{2}u-x)^2} dx \right) d\varrho(y) \\ &= \left(\frac{1}{\pi^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(y-u)^2} d\varrho(y) \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-(t-u)^2} dt \right) = \pi^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(y-u)^2} d\varrho(y). \end{aligned}$$

В силу (4.2) последний интеграл является преобразованием Березина $\tilde{\mu}$ оператора \mathbf{T}_μ , где $\mu = \varrho \otimes \nu_n$. Поэтому ввиду инъективности преобразования Березина $S = \mathbf{T}_\mu$ с $\mu = \varrho \otimes \nu_n$. \square

В качестве следствия теорем 4.1 и 4.2 получаем следующий результат.

Следствие 4.1. *Если $\varrho \in \mathfrak{B}_{\text{reg}}(\mathbb{R}^n)$, то $\gamma_\varrho \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ тогда и только тогда, когда $\varrho \otimes \nu_n$ — мера FC для $\mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)$.*

5. Горизонтальные теплицевы операторы, порожденные мерами типа k -FC

Пусть $k \in (\mathbb{Z}_+/2)^n$. Если μ — мера типа k -FC для $\mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)$, то в силу предложения 3.5 теплицев оператор $\mathbf{T}_{\partial^\alpha \bar{\partial}^\beta \mu}$, порожденный полуторалинейной формой $F_{\mu, \alpha, \beta}$, ограничен для $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$ таких, что $2k = \alpha + \beta$. Таким образом, полуторалинейная форма

$$G_{\mu, 2k} = \sum_{\beta \leq 2k} \binom{2k}{\beta} F_{\mu, 2k-\beta, \beta} \quad (5.1)$$

ограничена, как только ограничен теплицев оператор $\mathbf{T}_{G_{\mu, 2k}}$; кроме того, действие последнего оператора задается в виде

$$\mathbf{T}_{G_{\mu, 2k}} = \sum_{\beta \leq 2k} \binom{2k}{\beta} \mathbf{T}_{\partial^{2k-\beta} \bar{\partial}^\beta \mu}.$$

В силу (5.1) действие теплицева оператора $\mathbf{T}_{G_{\mu, 2k}}$ на $f \in \mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)$ допускает следующее интегральное представление:

$$(\mathbf{T}_{G_{\mu, 2k}} f)(z) = \pi^{-n} \sum_{\beta \leq 2k} \binom{2k}{\beta} z^\beta \int_{\mathbb{C}^n} (\partial^{2k-\beta} f)(w) e^{z \cdot \bar{w}} e^{-|w|^2} d\mu(w), \quad z \in \mathbb{C}^n.$$

Следуя (3.7), введем *вещественную копроизводную* $\partial_R^{2k} \mu$ меры μ по формуле

$$\partial_R^{2k} \mu = \sum_{\beta \leq 2k} \binom{2k}{\beta} \partial^{2k-\beta} \bar{\partial}^\beta \mu = (\partial + \bar{\partial})^{2k} \mu.$$

В силу (3.10) $\mathbf{T}_{\partial_R^{2k} \mu} := \mathbf{T}_{G_{\mu, 2k}}$ — единственный ограниченный оператор такой, что

$$\langle \mathbf{T}_{\partial_R^{2k} \mu} f, g \rangle = G_{\mu, 2k}(f, g)$$

для любых $f, g \in \mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)$. Теперь в силу (3.8) соответствующее преобразование Березина $\widetilde{\partial_R^{2k} \mu}$ равно

$$\begin{aligned} \widetilde{\partial_R^{2k} \mu}(z) &= \pi^{-n} \sum_{\beta \leq 2k} \binom{2k}{\beta} z^\beta \bar{z}^{2k-\beta} \int_{\mathbb{C}^n} e^{-|z-w|^2} d\mu(w) \\ &= 2^{|2k|} \pi^{-n} (\text{Re } z)^{2k} \int_{\mathbb{C}^n} e^{-|z-w|^2} d\mu(w), \quad z \in \mathbb{C}^n. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Теорема 5.1 (критерий для горизонтальных мер k -FC). *Пусть $k \in (\mathbb{Z}_+/2)^n$ и μ — положительная мера k -FC для $\mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)$. Тогда следующие условия эквивалентны.*

1. $\mathbf{T}_{\partial_R^{2k} \mu}$ горизонтален.
2. $\widetilde{\partial_R^{2k} \mu}$ зависит только от $\text{Re } z$.

3. μ инвариантна при горизонтальных сдвигах, т.е. $\mu(X + ih) = \mu(X)$ для каждого борелевского множества $X \subset \mathbb{C}^n$ и каждого $h \in \mathbb{R}^n$.
4. $\mu(Y \times (Z + h)) = \mu(Y \times Z)$ для любых борелевских множеств $Y, Z \subset \mathbb{R}^n$ и каждого $h \in \mathbb{R}^n$.
5. μ — горизонтальная мера, т.е. существует $\varrho \in \mathfrak{B}_{\text{reg}}(\mathbb{R}^n)$ такое, что $\mu = \varrho \otimes \nu_n$.

Доказательство. Доказательство почти такое же, как доказательство теоремы 4.1. Здесь мы используем лемму 4.1 для любых $|k| \neq 0$. \square

В силу теоремы 5.1 каждый теплицев оператор $\mathbf{T}_{\boldsymbol{\partial}_R^{2k}\mu}$ с вещественной копроизводной $\boldsymbol{\partial}_R^{2k}\mu$ порядка $2k$ некоторой горизонтальной меры μ в качестве символа является горизонтальным оператором. Следовательно, в силу предложения 2.1 он унитарно эквивалентен оператору умножения на некоторую функцию из L_∞ . Мы приведем явную формулу для этой L_∞ -функции.

Теорема 5.2 (диагонализация $\mathbf{T}_{\boldsymbol{\partial}_R^{2k}\mu}$). Пусть $k \in (\mathbb{Z}_+/2)^n$ и $\mu = \varrho \otimes \nu_n$ — мера k -hFC для $\mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)$. Тогда теплицев оператор $\mathbf{T}_{\boldsymbol{\partial}_R^{2k}\mu}$ унитарно эквивалентен оператору

$$\mathbf{B}\mathbf{T}_{\boldsymbol{\partial}_R^{2k}\mu}\mathbf{B}^* = \gamma_{\varrho, 2k} \text{Id},$$

где функция $\gamma_{\varrho, 2k}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ определена формулой

$$\gamma_{\varrho, 2k}(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}_{2k}^{(n)}(\sqrt{2}x - y) e^{-(x - \sqrt{2}y)^2} d\varrho(y), \quad x \in \mathbb{R}^n; \quad (5.3)$$

здесь $\mathcal{H}_m^{(n)}$ — произведение эрмитовых полиномов \mathcal{H}_{m_j} , т.е.

$$\mathcal{H}_m^{(n)}(t) = \prod_{j=1}^n (-1)^{m_j} e^{t_j^2} \frac{d^{m_j}}{dt_j^{m_j}} (e^{-t_j^2}), \quad t = (t_j)_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n.$$

Доказательство. Пусть $S = \mathbf{B}^* M_{\gamma_{\varrho, 2k}} \mathbf{B}$. Тогда в силу (2.1) и теоремы Тонелли простыми вычислениями получаем, что для каждого $z = u + iv \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} \tilde{S}(u + iv) &= e^{-|u+iv|^2} \int_{\mathbb{R}^n} \gamma_{\varrho, 2k}(x) |(\mathbf{B}K_{u+iv})(x)|^2 dx \\ &= \frac{2^{n/2}}{\pi^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}_{2k}^{(n)}(\sqrt{2}x - y) e^{-(x - \sqrt{2}y)^2} e^{-(\sqrt{2}u - x)^2} dx \right) d\varrho(y) \\ &= \frac{2^{n/2}}{\pi^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(y-u)^2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}_{2k}^{(n)}(\sqrt{2}x - y) e^{-(\sqrt{2}x - (y+u))^2} dx \right) d\varrho(y) \\ &= \left(\frac{1}{\pi^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(y-u)^2} d\varrho(y) \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}_{2k}^{(n)}(t) e^{-(t-u)^2} dt \right) \\ &= \left(\frac{1}{\pi^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(y-u)^2} d\varrho(y) \right) \left(\prod_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}_{2k_j}(t_j) e^{-(t_j - u_j)^2} dt_j \right) = \frac{2^{2|k|} (\text{Re } z)^{2k}}{\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(y-u)^2} d\varrho(y) \end{aligned}$$

(формула 7.374- 6 из [12], примененная n раз.) В силу (5.2) и (4.1) последний интеграл есть в точности преобразование Березина $\widetilde{\boldsymbol{\partial}_R^{2k}\mu}$ оператора $\mathbf{T}_{\boldsymbol{\partial}_R^{2k}\mu}$, где $\mu = \varrho \otimes \nu_n$. Поэтому ввиду инъективности преобразования Березина $S = \mathbf{T}_{\boldsymbol{\partial}_R^{2k}\mu}$ с $\mu = \varrho \otimes \nu_n$. \square

6. Меры типа (α, k) -hFC для $\mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)$ при $k \geq \alpha$

Заметим, что если $\mu = \varrho \otimes \nu_n$ — мера типа k -FC для $\mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)$, то μ_k , заданная формулой (3.5), имеет вид $\mu_k = \varrho_k \otimes \nu_{n,-k}$, где

$$\varrho_k(X) = \int_X \prod_{j=1}^n (1 + x_j^2)^{k_j} d\varrho(x), \quad X \in \text{Borel}(\mathbb{R}^n),$$

$$\nu_{n,-k}(Y) = \int_Y \prod_{j=1}^n \frac{dy_j}{(1 + y_j^2)^{-k_j}}, \quad Y \in \text{Borel}(\mathbb{R}^n).$$

Таким образом, если μ — мера k -hFC, то μ_k не будет горизонтальной мерой типа FC для $\mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)$. Для учета данных обстоятельств введем понятие α -горизонтальных объектов.

Определение 6.1 (α -горизонтальные меры). Пусть $\alpha \in \mathbb{Z}^n$. Будем говорить, что $\mu \in \mathfrak{B}_{\text{reg}}(\mathbb{C}^n)$ α -горизонтальна, если существует $\varrho \in \mathfrak{B}_{\text{reg}}(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющая равенству $\mu = \varrho \otimes \nu_{n,\alpha}$, где

$$d\nu_{n,\alpha}(y) = \prod_{j=1}^n \frac{dy_j}{(1 + y_j^2)^{\alpha_j}}.$$

Кроме того, если $\mu = \varrho \otimes \nu_{n,\alpha}$ — мера типа k -FC для $\mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)$, будем говорить, что μ — мера типа (α, k) -hFC; если $|\alpha| = |k| = 0$, то μ является мерой hFC, как определено выше.

Предложение 6.1. Пусть $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ и $k, p \in (\mathbb{Z}_+/2)^n$. Комплексная борелевская мера μ является мерой (α, k) -hFC для $\mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)$ тогда и только тогда, когда μ_{k-p} — мера $(p + \alpha - k, p)$ -hFC.

Доказательство. Предположим, что μ — положительная мера (α, k) -hFC для $\mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)$. Тогда μ — мера k -FC для $\mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)$ такая, что $\mu = \varrho \otimes \nu_{n,\alpha}$ для некоторой регулярной меры ϱ на \mathbb{R}^n . В силу предложения 3.4 μ_{k-p} является мерой p -FC для $\mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)$ и

$$\mu_{k-p}(X) = \int_X \prod_{j=1}^n (1 + x_j^2)^{k_j - p_j} (1 + y_j^2)^{k_j - p_j} d\varrho(x) d\nu_{n,\alpha}(y) = \varrho_{k-p} \otimes \nu_{n,p+\alpha-k}(X)$$

для любого борелевского множества X в \mathbb{C}^n . Здесь ϱ_{k-p} обозначает положительную меру

$$\varrho_{k-p}(Y) = \int_Y \prod_{j=1}^n (1 + x_j^2)^{k_j - p_j} d\varrho(x).$$

Обратно, если μ_{k-p} — мера $(p + \alpha - k, p)$ -hFC, то μ_{k-p} — мера типа p -FC для $\mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)$ и, следовательно, μ — мера типа k -FC для $\mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)$ в силу предложения 3.4. Кроме того, существует $\varrho \in \mathfrak{B}_{\text{reg}}(\mathbb{R}^n)$ такая, что $\mu_{k-p} = \varrho \otimes \nu_{n,p+\alpha-k}$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \mu(X) &= \int_X \prod_{j=1}^n (1 + x_j^2)^{p_j - k_j} (1 + y_j^2)^{p_j - k_j} d\mu_{k-p}(y) \\ &= \int_A \prod_{j=1}^n (1 + x_j^2)^{p_j - k_j} (1 + y_j^2)^{p_j - k_j} d\varrho(x) d\nu_{n,p+\alpha-k}(y) = \varrho_{p-k} \otimes \nu_{n,\alpha}(X) \end{aligned}$$

для любого борелевского множества $X \subset \mathbb{C}^n$. Здесь ϱ_{p-k} обозначает положительную меру

$$\varrho_{p-k}(Y) = \int_Y \prod_{j=1}^n (1 + x_j^2)^{p_j - k_j} d\varrho(x).$$

Предложение доказано. □

Теперь, если $\alpha, k \in (\mathbb{Z}_+/2)^n$ такие, что $k \geq \alpha$, и $\mu = \varrho \otimes \nu_{n,\alpha}$ — положительная мера типа (α, k) -hFC для $\mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)$, то в силу предложения 6.1 μ_α — мера типа $(0, k - \alpha)$ -hFC для $\mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)$, т.е. $\mu_\alpha = \varrho_\alpha \otimes \nu_{n,0}$, где

$$d\varrho_\alpha(y) = \prod_{j=1}^n (1 + y_j^2)^{\alpha_j} d\varrho(y),$$

является мерой $(k - \alpha)$ -FC, которая горизонтальна. Следовательно, в силу теоремы 5.1 теплицев оператор $\mathbf{T}_{\vartheta_R^{2(k-\alpha)}\mu_\alpha}$ горизонтален и в силу теоремы 5.2 унитарно эквивалентен оператору

$$\mathbf{B}\mathbf{T}_{\vartheta_R^{2(k-\alpha)}\mu_\alpha}\mathbf{B}^* = M_{\gamma_{\varrho_\alpha, 2(k-\alpha)}},$$

где $\gamma_{\varrho_\alpha, 2(k-\alpha)}$ такая же, как в (5.3).

7. \mathcal{L} -инвариантные меры типа k -FC

Пусть \mathcal{L} — лагранжева плоскость симплектического векторного пространства $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$. В этом параграфе мы обобщим результаты о мерах типа k -hFC на случай \mathcal{L} -инвариантных мер типа k -FC.

Определение 7.1 (\mathcal{L} -FC). Пусть $\mathcal{L} \in \text{Lag}(2n, \mathbb{R})$. Комплекснозначная регулярная борелевская мера μ на \mathbb{C}^n называется инвариантной при *лагранжевых сдвигах* (кратко, \mathcal{L} -инвариантна), если для каждого борелевского подмножества E в \mathbb{C}^n и каждого $h \in \mathcal{L}$

$$\mu(E - h) = \mu(E).$$

В частности, $\mathcal{L} = i\mathbb{R}^n$ соответствует горизонтальному случаю. Кроме того, если $k \in (\mathbb{Z}_+/2)^n$ и μ — мера типа k -FC для $\mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)$, которая \mathcal{L} -инвариантна, то мы просто говорим, что μ — мера k - \mathcal{L} -FC.

В силу транзитивности $U(2n, \mathbb{R})$ [13, предложение 43] и ввиду изоморфизма $U(2n, \mathbb{R}) \simeq U(n, \mathbb{C})$ существует унитарная матрица $\mathbf{X} \in U(n, \mathbb{C})$ такая, что $\mathbf{X}\mathcal{L} = i\mathbb{R}^n$. Для $\mathbf{X} \in U(n, \mathbb{C})$ обозначим через $V_{\mathbf{X}}$ линейный оператор $V_{\mathbf{X}}: L_2(\mathbb{C}^n, dg_n) \rightarrow L_2(\mathbb{C}^n, dg_n)$, заданный формулой

$$(V_{\mathbf{X}}f)(z) = f(\mathbf{X}^*z), \quad z \in \mathbb{C}^n. \quad (7.1)$$

Так как $\mathbf{X}^* = \mathbf{X}^{-1} \in U(n, \mathbb{C})$, $V_{\mathbf{X}}$ — унитарный оператор такой, что $V_{\mathbf{X}}^* = V_{\mathbf{X}^{-1}}$. Борелевская мера μ на \mathbb{C}^n соотносится с мерой $\mu_{\mathbf{X}}$ на \mathbb{C}^n следующим образом:

$$\mu_{\mathbf{X}}(E) = \mu(\mathbf{X}E) = \mu(\{\mathbf{X}z: z \in E\}) \quad \text{для всех борелевских множеств } E. \quad (7.2)$$

Заметим, что регулярность μ влечет регулярность $\mu_{\mathbf{X}}$. Кроме того, μ — мера FC для $\mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)$ при условии, что $\mu_{\mathbf{X}}$ — мера FC. Тогда в силу (7.1) для каждого $f \in \mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)$

$$\int_{\mathbb{C}^n} |f(w)|^2 d\mu_{\mathbf{X}}(w) = \int_{\mathbb{C}^n} |f(\mathbf{X}z)|^2 d\mu(z) = \int_{\mathbb{C}^n} |(V_{\mathbf{X}^{-1}}f)(z)|^2 d\mu(z).$$

Кроме того, μ является мерой типа hFC тогда и только тогда, когда $\mu_{\mathbf{X}}$ является мерой \mathcal{L} -FC, поскольку для любого борелевского множества E

$$\mu_{\mathbf{X}}(E - h) = \mu(\mathbf{X}E - \mathbf{X}h) = \mu(\mathbf{X}E - it) = \mu(\mathbf{X}E) = \mu_{\mathbf{X}}(E).$$

Поэтому, если μ — мера \mathcal{L} -FC, то $\mu_{\mathbf{X}}^*$ горизонтальна и в силу теоремы 4.1 $\mu_{\mathbf{X}}^* = \varrho \otimes \nu_n$ для некоторой регулярной борелевской меры ϱ . Так как матрица $\mathbf{X} \in U(n, \mathbb{C})$, удовлетворяющая $\mathbf{X}\mathcal{L} = i\mathbb{R}^n$, не единственна, для любого другого $\mathbf{Y} \in U(n, \mathbb{C})$ такого, что $\mathbf{Y}\mathcal{L} = i\mathbb{R}^n$, имеем $\mu_{\mathbf{Y}}^* = \eta \otimes \nu_n$ и

$$\mu_{\mathbf{X}}^*(E) = \mu_{\mathbf{Y}}^*(\mathbf{Y}\mathbf{X}^*E), \quad E \in \text{Borel}(\mathbb{C}^n).$$

Кроме того, легко проверить, что $t \mapsto \mathbf{Y}\mathbf{X}^*t$ — автоморфизм $i\mathbb{R}^n$.

Предложение 7.1. Пусть $\mathcal{L} \in \text{Lag}(2n, \mathbb{R})$ и $\mathbf{X} \in U(n, \mathbb{C})$ фиксированы так, что $\mathbf{X}\mathcal{L} = i\mathbb{R}^n$. Если $k \in (\mathbb{Z}_+/2)^n$, то C^* -алгебра $\mathcal{T}(k\text{-}\mathcal{L}\text{-FC})$, порожденная теплицевыми операторами $\mathbf{T}_{\vartheta_R^{2k}\mu}$, изометрически изоморфна C^* -алгебре $\mathcal{T}(k\text{-hFC})$, порожденной теплицевыми операторами $\mathbf{T}_{\vartheta_R^{2k}\eta}$.

Пример 7.1. Пусть $\mathcal{L} = \mathbb{R}^n \times \{0\}$ и μ — мера (α, k) - \mathcal{L} -FC. Заметим, что стандартная симплектическая матрица \mathbf{J} поворачивает лагранжеву плоскость $\{0\} \times \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n \times \{0\}$, т.е.

$$\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому, если $\mathbf{X} = -iI_n \in \mathbf{U}(n, \mathbb{C})$, то в силу (7.2)

$$\mu(E \times F) = \mu(\mathbf{X}\mathbf{X}^*(E \times F)) = \mu_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}^*(E \times F)) = \mu_{\mathbf{X}}((-F) \times E) = \varrho(-F)\nu_n(-E).$$

Таким образом, в силу предложения 6.1 мера μ_{α} является мерой $(0, k - \alpha)$ -hFC для $\mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)$, где

$$\mu_{\alpha} = \varrho_{\alpha} \otimes \nu_{n,0}, \quad d\varrho_{\alpha}(y) = \prod_{j=1}^n (1 + y_j^2)^{\alpha_j} d\varrho(y).$$

Поэтому в силу (5.3) соответствующая спектральная функция задается формулой

$$\gamma_{\varrho_{\alpha}, 2(k-\alpha)}(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}_{2(k-\alpha)}^{(n)}(\sqrt{2}x - y) e^{-(x - \sqrt{2}y)^2} \prod_{j=1}^n (1 + y_j^2)^{\alpha_j} d\varrho(y), \quad x \in \mathbb{R}^n;$$

здесь $\mathcal{H}_{2(k-\alpha)}^{(n)}$ — произведение эрмитовых полиномов $\mathcal{H}_{2(k_j-\alpha_j)}$, т.е.

$$\mathcal{H}_{2(k-\alpha)}^{(n)}(t) = \prod_{j=1}^n e^{t_j^2} \frac{d^{2(k_j-\alpha_j)}}{dt_j^{2(k_j-\alpha_j)}}(e^{-t_j^2}), \quad t = (t_j)_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n.$$

С другой стороны, пусть $\Delta = \{(x, x) \in \mathbb{R}^{2n} : x \in \mathbb{R}^n\}$ и μ — мера k - Δ FC. Поскольку

$$\begin{pmatrix} I_n & I_n \\ -I_n & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix},$$

если $\mathbf{X} = \frac{1}{2}(I_n - iI_n) \in \mathbf{U}(n, \mathbb{C})$, с учетом (7.2) имеем

$$\begin{aligned} \mu(E \times F) &= \mu(\mathbf{X}\mathbf{X}^*(E \times F)) = \mu_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}^*(E \times F)) = \mu_{\mathbf{X}}\left(\frac{(E+F)}{2} \times \frac{(F-E)}{2}\right) \\ &= \varrho\left(\frac{E+F}{2}\right)\nu_n\left(\frac{F-E}{2}\right). \end{aligned}$$

Определение 7.2 ($\alpha\mathcal{L}$ -инвариантная мера). Пусть $\mathcal{L} \in \text{Lag}(2n, \mathbb{R})$, $\mathbf{X} \in \mathbf{U}(n, \mathbb{C})$ фиксированы и $\mathbf{X}\mathcal{L} = i\mathbb{R}^n$. Если $\alpha \in \mathbb{Z}^n$, то будем говорить, что $\mu \in \mathfrak{B}_{\text{reg}}(\mathbb{C}^n)$ $\alpha\mathcal{L}$ -инвариантна, если $\mu_{\mathbf{X}^*}$ α -горизонтальна. Кроме того, если $k \in (\mathbb{Z}_+/2)^n$ и μ — мера типа k -FC для $\mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)$, которая $\alpha\mathcal{L}$ -инвариантна, то мы просто говорим, что μ — мера (α, k) - \mathcal{L} -FC.

Теорема 7.1. Пусть $\mathcal{L} \in \text{Lag}(2n, \mathbb{R})$, $\mathbf{X} \in \mathbf{U}(n, \mathbb{C})$ фиксированы и $\mathbf{X}\mathcal{L} = i\mathbb{R}^n$. Если $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ и $k \in (\mathbb{Z}_+/2)^n$, $k \geq \alpha$, то C^* -алгебра $\mathcal{T}((\alpha, k)\text{-}\mathcal{L}\text{-FC})$, порожденная теплицевыми операторами $\mathbf{T}_{\partial_R^{2(k-\alpha)}\mu_{\mathbf{X}^*, \alpha}}$, изометрически изоморфна $\mathcal{T}((\alpha, k)\text{-hFC})$.

Наконец, мы выразим условия теорем 5.1, 5.2 и 7.1 в терминах самой меры μ . Для этого введем \mathcal{L} -вещественные копроизводные.

Определение 7.3 (\mathcal{L} -вещественные копроизводные). Пусть $\mathcal{L} \in \text{Lag}(2n, \mathbb{R})$, $\mathbf{X} \in \mathbf{U}(n, \mathbb{C})$ фиксированы и $\mathbf{X}\mathcal{L} = i\mathbb{R}^n$. Если $k \in (\mathbb{Z}_+/2)^n$ и μ — мера типа k -FC для $\mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)$, то

$$\partial_{R, \mathcal{L}}^{2k} \mu = \partial_R^{2k} \mu_{\mathbf{X}^*} \quad (7.3)$$

называется k -й \mathcal{L} -вещественной копроизводной меры μ .

Теорема 7.2 (критерий для мер k - \mathcal{L} -FC). Пусть $\mathcal{L} \in \text{Lag}(2n, \mathbb{R})$, $\mathbf{X} \in \mathbf{U}(n, \mathbb{C})$ фиксированы, $\mathbf{X}\mathcal{L} = i\mathbb{R}^n$, $k \in (\mathbb{Z}_+/2)^n$ и μ — комплексная мера k -FC для $\mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)$. Тогда следующие условия эквивалентны.

1. $\mathcal{W}_{-h} \mathbf{T}_{\partial_{R, \mathcal{L}}^{2k} \mu} \mathcal{W}_h = \mathbf{T}_{\partial_R^{2k} \mu}$ for каждого $h \in \mathcal{L}$.
2. $\widetilde{\partial_{R, \mathcal{L}}^{2k} \mu}$ — \mathcal{L} -инвариантная функция.

3. μ \mathcal{L} -инвариантна, т.е. $\mu(X + h) = \mu(X)$ для каждого борелевского множества $X \subset \mathbb{C}^n$ и каждого $h \in \mathcal{L}$.
4. $\mu_{\mathbf{X}^*}$ — горизонтальная мера, т.е. существует $\varrho \in \mathfrak{B}_{\text{reg}}(\mathbb{R}^n)$ такое, что $\mu_{\mathbf{X}^*} = \varrho \otimes \nu_n$.

Пусть $\mathcal{L} \in \text{Lag}(2n, \mathbb{R})$, $\mathbf{X} \in \text{U}(n, \mathbb{C})$ фиксированы, $\mathbf{X}\mathcal{L} = i\mathbb{R}^n$, $k \in (\mathbb{Z}_+/2)^n$ и μ — комплексная мера k - \mathcal{L} -FC $\text{lkz } \mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)$. Тогда $\mu_{\mathbf{X}^*}$ горизонтальна, т.е. $\mu_{\mathbf{X}^*} = \varrho \otimes \nu_n$, и если записать \mathbf{X} в виде

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2,$$

где

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ C & D \end{pmatrix},$$

то получим

$$\mu(Y \times Z) = \mu_{\mathbf{X}^*}(\mathbf{X}(Y \times Z)) = \varrho(\mathbf{X}_1(Y \times Z))\nu_n(\mathbf{X}_2(Y \times Z))$$

для любых $Y, Z \in \text{Borel}(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 7.3 (диагонализация $\mathbf{T}_{\mathfrak{d}_{R, \mathcal{L}}^{2k, \mu}}$). Пусть $\mathcal{L} \in \text{Lag}(2n, \mathbb{R})$, $\mathbf{X} \in \text{U}(n, \mathbb{C})$ фиксированы, $\mathbf{X}\mathcal{L} = i\mathbb{R}^n$, $k \in (\mathbb{Z}_+/2)^n$ и μ — мера k - \mathcal{L} -FC для $\mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)$. Тогда теплицев оператор $\mathbf{T}_{\mathfrak{d}_{R, \mathcal{L}}^{2k, \mu}}$ унитарно эквивалентен оператору $\mathbf{B}\mathbf{T}_{\mathfrak{d}_{R, \mathcal{L}}^{2k, \mu}}\mathbf{B}^* = \gamma_{\varrho, 2k} \text{Id}$, где $\mu_{\mathbf{X}^*} = \varrho \otimes \nu_n$ и $\gamma_{\varrho, 2k}$ задана в (5.3).

Теорема 7.4. Пусть $\mathcal{L} \in \text{Lag}(2n, \mathbb{R})$, $\mathbf{X} \in \text{U}(n, \mathbb{C})$ фиксированы и $\mathbf{X}\mathcal{L} = i\mathbb{R}^n$. Если $\alpha \in \mathbb{Z}^n$ и $k \in (\mathbb{Z}_+/2)^n$, удовлетворяющих $k \geq \alpha$, то C^* -алгебра $\mathcal{T}((\alpha, k)\text{-}\mathcal{L}\text{-FC})$, порожденная теплицевыми операторами $\mathbf{T}_{\mathfrak{d}_{R, \mathcal{L}}^{2(k-\alpha), \mu_\alpha}}$ изометрически изоморфна $\mathcal{T}((\alpha, k)\text{-}hFC)$.

8. Общие свойства

Обозначим через $\mathcal{T}(hFC)$, $\mathcal{T}(k\text{-}hFC)$, $\mathcal{T}((\alpha, k)\text{-}hFC)$ и $\mathcal{T}(k\text{-}\mathcal{L}\text{-FC})$ C^* -алгебры, порожденные всеми теплицевыми операторами, определенными соответствующими мерами в качестве символов: горизонтальными FC, горизонтальными k -FC, горизонтальными (α, k) -FC и \mathcal{L} -инвариантными k -FC (определенными в § 4, 5, 6 и 7) соответственно.

Главный результат в этих параграфах устанавливает унитарную эквивалентность рассматриваемых теплицевых операторов \mathbf{T}_* и операторов умножения на их спектральные функции γ_* и дает точные формулы для этих функций, своих для каждого типа рассматриваемых мер-символов.

Обозначим через $\mathfrak{G}(hFC)$, $\mathfrak{G}(k\text{-}hFC)$, $\mathfrak{G}((\alpha, k)\text{-}hFC)$, и $\mathfrak{G}(k\text{-}\mathcal{L}\text{-FC})$ C^* -алгебры, порожденные всеми спектральными функциями γ_* , своими для каждого из указанных четырех типов мер-символов.

Пусть, наконец, $\mathcal{T}(\ast)$ — какая-либо из указанных выше алгебр теплицевых операторов и $\mathfrak{G}(\ast)$ — соответствующая алгебра функций. Тогда, как было отмечено в § 1, полученные результаты о диагонализации выявляют большинство основных свойств соответствующих теплицевых операторов.

Теорема 8.1. C^* -алгебра $\mathcal{T}(\ast)$ коммутативна и изометрически изоморфна (и даже унитарно эквивалентна) C^* -алгебре $\mathfrak{G}(\ast)$. Изоморфизм

$$\pi_* : \mathcal{T}(\ast) \longrightarrow \mathfrak{G}(\ast)$$

порождается отображением

$$\pi_* : \mathbf{T}_* \longmapsto \gamma_*.$$

Норма каждого оператора $\mathbf{T} \in \mathcal{T}(\ast)$ совпадает со своим спектральным радиусом и имеет вид

$$\|\mathbf{T}\| = r_{\mathbf{T}} = \sup |\pi_*(\mathbf{T})|.$$

Спектр каждого оператора $\mathbf{T} \in \mathcal{T}(\ast)$ совпадает с замыканием области значений спектральной функции $\gamma = \pi_*(\mathbf{T})$.

Каждое общее инвариантное подпространство $\mathcal{F}^2(\mathbb{C}^n)$ для всех операторов из $\mathcal{T}(\ast)$ имеет вид $\mathbf{V}^*(L_2(M))$, где M — измеримое подмножество \mathbb{R}^n .

Литература

1. V. Bargmann, “On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform”, *Commun. Pure Appl. Math.* **14**, No. 3, 187–214 (1961).
2. V. A. Fock, “Konfigurationsraum und zweite Quantelung”, *Z. Phys.* **75**, No. 9-10, 622–647 (1932).
3. И. Сигал, *Математические задачи релятивистской физики*, Мир. М. (1968).
4. J. Isralowitz, K. Zhu, “Toeplitz operators on Fock spaces”, *Integral. Equations Oper. Theory* **66**, No. 4, 593–611 (2010).
5. G. Rozenblum, N. Vasilevski, “Toeplitz operators defined by sesquilinear forms: Fock space case”, *J. Funct. Anal.* **267**, No. 11, 4399–4430 (2014).
6. K. Esmeral, N. Vasilevski, “ C^* -algebra generated by horizontal Toeplitz operators on the Fock space”, *Bol. Soc. Mat. Mex., III. Ser.* **22**, No. 2, 567–582 (2016).
7. K. Zhu, *Analysis on Fock Spaces*, Springer, New York (2012).
8. F. A. Berezin, “General concept of quantization”, *Commun. Math. Phys.* **40**, No. 2, 153–174 (1975).
9. G. B. Folland, *Harmonic Analysis in Phase Space*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ (1989).
10. В. И. Богачев, *Основы теории меры. Т. 1*, ПХД, М. (2007).
11. W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York (1974).
12. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Физматлит, М. (1963).
13. M. A. de Gosson, *Symplectic Methods in Harmonic Analysis and in Mathematical Physics*, Birkhäuser, Basel (2011).

Статья поступила в редакцию 28 марта 2019 г.