А. Б. Костин, **В. Б. Шерстюков**

ДВУСТОРОННИЕ ОЦЕНКИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ, СВЯЗАННОЙ С ЧИСЛОМ e

Предложены новые двусторонние оценки числа e с точными константами. Миноранты и мажоранты в оценках имеют формат цепных дробей. Получены новые неравенства в задаче о рациональных приближениях числа e и выдвинута гипотеза о справедливости целой серии подобных неравенств. Обсуждается связь с известными результатами.

1. Постановка задачи и основной результат

В статьях авторов [**1, 2**], посвященных специальным аспектам задачи о рациональной аппроксимации числа e, естественным образом возникла и исследовалась функция

$$H(x) \equiv 1 - e^{-1}(1+x)^{1/x}, \quad x \in (-1, +\infty). \tag{1.1}$$

Изучение свойств некоторых близких по структуре функций способствовало продвижению в решении одной трудной проблемы из теории конечных разностей [**3**].

Аналитическая функция (1.1) допускает степенное разложение

$$H(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\, a_n x^n = \frac{1}{2}x - \frac{11}{24}x^2 + \frac{7}{16}x^3 - \frac{2447}{5760}x^4 + \dots, \quad x \in (-1, 1). \tag{1.2}$$

Доказано [**1**, предложение 2.1], что все коэффициенты a_n в представлении (1.2) являются положительными рациональными числами, которые можно найти по рекуррентному правилу

$$a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} a_{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1.3}$$

считая $a_0 = 1$. Числовая последовательность (1.3), строго убывая, стремится к $1/e$. Доказательство этих свойств основано на интегральном представлении

$$a_n = \frac{1}{e}\left(1 + \int_0^1 \varphi(\tau)\tau^n\, d\tau\right), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1.4}$$

выведенном в [**1**, предложение 4.1]. Фигурирующая в формуле (1.4) функция φ имеет вид

$$\varphi(\tau) \equiv \frac{1}{\pi}\frac{\sin(\pi\tau)}{\tau^{1-\tau}(1-\tau)^{\tau}}, \quad \tau \in (0,1), \quad \varphi(0) = \varphi(1) = 1. \tag{1.5}$$

А. Б. Костин: МГУ и НИЯУ «МИФИ», Москва, Россия, abkostin@yandex.ru.
В. Б. Шерстюков: МГУ и МЦФПМ, Москва, Россия, shervb73@gmail.com.

Английский перевод опубликован в *J. Math. Sci.* **284**, No. 1, 83–92 (2024).

Элементарная функция (1.5) симметрична, непрерывна на $[0,1]$ и бесконечно дифференцируема на $(0,1)$. Подробный анализ формулы (1.4) позволяет выявить [**2**, § 2] асимптотический закон

$$a_n = \frac{1}{e}\Big(1 + \frac{1}{n} - \frac{\ln n}{n^2} - \frac{\gamma}{n^2}\Big) + O\Big(\frac{\ln^2 n}{n^3}\Big), \quad n \to \infty,$$

где $\gamma = 0.57721\ldots$ — константа Эйлера — Маскерони.

Благодаря (1.4) удается также найти удобное интегральное представление для исходной функции (1.1), которое можно записать в виде

$$H(x) = \frac{x}{e}\left(\frac{1}{1+x} + \int\limits_0^1 \frac{\tau\varphi(\tau)}{1+x\tau}d\tau\right), \quad x \in (-1, +\infty). \tag{1.6}$$

Подробности см. в [**2**, теорема 1].

Основной результат статьи представлен в следующем утверждении.

Теорема 1.1. *Для аналитической функции* (1.1) *при всех* $x \in (0,1]$ *справедливы точные двусторонние оценки*

$$\frac{e-2}{e}x \leqslant H(x) < \frac{x}{2}, \tag{1.7}$$

$$\frac{x}{2 + \dfrac{11x}{6}} \equiv \frac{1}{\dfrac{2}{x} + \dfrac{11}{6}} < H(x) \leqslant \frac{1}{\dfrac{2}{x} + \dfrac{4-e}{e-2}} \equiv \frac{x}{2 + \dfrac{(4-e)x}{e-2}}. \tag{1.8}$$

Левое неравенство в (1.7) обращается в равенство в точке $x = 1$, а в правом неравенстве коэффициент $1/2$ при x нельзя заменить меньшим ввиду асимптотики

$$H(x) = \frac{x}{2} + O(x^2), \quad x \to 0.$$

Правое неравенство в (1.8) обращается в равенство в точке $x = 1$, а в левом неравенстве число $11/6$ в знаменателе дроби нельзя заменить меньшим ввиду асимптотики

$$H(x) = \frac{x}{2 + \dfrac{11x}{6}} + O(x^3), \quad x \to 0,$$

вытекающей из (1.2).

2. Доказательство теоремы 1.1

Для вывода соотношений (1.7), (1.8) потребуются свойства вспомогательных функций

$$\Phi_1(x) \equiv \frac{H(x)}{x} = \frac{1}{x}(1 - e^{-1}(1+x)^{1/x}), \quad \Phi_1(0) = a_1 = \frac{1}{2}, \tag{2.1}$$

$$\Phi_2(x) \equiv \frac{1}{x}\Big(\frac{1}{\Phi_1(x)} - \frac{1}{\Phi_1(0)}\Big) = \frac{1}{H(x)} - \frac{2}{x} = \frac{e}{e - (1+x)^{1/x}} - \frac{2}{x}, \quad \Phi_2(0) = \frac{a_2}{a_1^2} = \frac{11}{6}, \tag{2.2}$$

определенных и непрерывных при всех $x \in (-1, +\infty)$.

Лемма 2.1. *Функция* $\Phi_1(x)$ *из формулы* (2.1) *убывает на луче* $x > -1$.

Доказательство. Согласно (1.6)

$$\Phi_1(x) = \frac{1}{e}\left(\frac{1}{1+x} + \int\limits_0^1 \frac{\tau\varphi(\tau)}{1+x\tau}d\tau\right), \quad x \in (-1, +\infty). \tag{2.3}$$

Ввиду положительности на $[0,1]$ функции (1.5) производная

$$\Phi_1'(x) = -\frac{1}{e}\left(\frac{1}{(1+x)^2} + \int\limits_0^1 \frac{\tau^2\varphi(\tau)}{(1+x\tau)^2}d\tau\right) \tag{2.4}$$

отрицательна для всех $x \in (-1, +\infty)$. □

Лемма 2.2. *Функция $F(x) \equiv 1/\Phi_1(x)$, где $\Phi_1(x)$ определена в* (2.1)*, возрастает и строго вогнута на луче $x > -1$.*

Доказательство. В силу леммы 2.1 функция $F(x)$ возрастает при $x > -1$. Покажем, что на этом луче F вогнута. Поскольку Φ_1 положительна и

$$F'(x) = -\frac{\Phi_1'(x)}{\Phi_1^2(x)}, \quad F''(x) = -\frac{\Phi_1(x)\Phi_1''(x) - 2(\Phi_1'(x))^2}{\Phi_1^3(x)},$$

достаточно доказать неравенство

$$\Phi_1(x)\Phi_1''(x) > 2(\Phi_1'(x))^2, \quad x \in (-1, +\infty). \tag{2.5}$$

Дифференцируя (2.4), находим

$$\Phi_1''(x) = \frac{2}{e}\left(\frac{1}{(1+x)^3} + \int_0^1 \frac{\tau^3\varphi(\tau)}{(1+x\tau)^3}d\tau\right), \quad x \in (-1, +\infty). \tag{2.6}$$

Подставив (2.3), (2.4), (2.6) в (2.5), получим

$$\left(\frac{1}{1+x} + \int_0^1 \frac{\tau\varphi(\tau)}{1+x\tau}d\tau\right)\left(\frac{1}{(1+x)^3} + \int_0^1 \frac{\tau^3\varphi(\tau)}{(1+x\tau)^3}d\tau\right) > \left(\frac{1}{(1+x)^2} + \int_0^1 \frac{\tau^2\varphi(\tau)}{(1+x\tau)^2}d\tau\right)^2. \tag{2.7}$$

Тем самым нужно доказать соотношение (2.7) при всех $x > -1$.

Для таких x и $\tau \in [0, 1]$ имеем

$$\sqrt{\frac{\tau\varphi(\tau)}{1+x\tau}}\sqrt{\frac{\tau^3\varphi(\tau)}{(1+x\tau)^3}} = \frac{\tau^2\varphi(\tau)}{(1+x\tau)^2}.$$

Но тогда согласно неравенству Коши — Буняковского

$$\int_0^1 \frac{\tau\varphi(\tau)}{1+x\tau}d\tau \int_0^1 \frac{\tau^3\varphi(\tau)}{(1+x\tau)^3}d\tau \geqslant \left(\int_0^1 \frac{\tau^2\varphi(\tau)}{(1+x\tau)^2}d\tau\right)^2, \quad x > -1. \tag{2.8}$$

Неравенство о среднем при тех же x дает

$$\frac{1}{(1+x)^3}\int_0^1 \frac{\tau\varphi(\tau)}{1+x\tau}d\tau + \frac{1}{1+x}\int_0^1 \frac{\tau^3\varphi(\tau)}{(1+x\tau)^3}d\tau \geqslant \frac{2}{(1+x)^2}\sqrt{\int_0^1 \frac{\tau\varphi(\tau)}{1+x\tau}d\tau \int_0^1 \frac{\tau^3\varphi(\tau)}{(1+x\tau)^3}d\tau}.$$

Оценив подкоренное выражение с помощью (2.8), получим

$$\frac{1}{(1+x)^3}\int_0^1 \frac{\tau\varphi(\tau)}{1+x\tau}d\tau + \frac{1}{1+x}\int_0^1 \frac{\tau^3\varphi(\tau)}{(1+x\tau)^3}d\tau > \frac{2}{(1+x)^2}\int_0^1 \frac{\tau^2\varphi(\tau)}{(1+x\tau)^2}d\tau, \quad x > -1. \tag{2.9}$$

Строгий знак неравенства в (2.9) объясняется тем, что неравенство о среднем применено к неравным положительным величинам. Сложим (2.8) и (2.9), затем добавим к обеим частям слагаемое $\dfrac{1}{(1+x)^4}$ и придем к неравенству, которое сворачивается в (2.7). □

Следующее утверждение имеет простой геометрический смысл и представляет собой вариант известной леммы о трех хордах (см., например, [**4**, глава 7, §1, задача 1.2]). Для полноты изложения приведем его с доказательством.

Лемма 2.3. *Пусть функция $G(x)$ определена и строго вогнута при $x \geqslant 0$. Тогда разностное отношение*

$$g(x) \equiv \frac{G(x) - G(0)}{x}$$

убывает на луче $x > 0$.

Доказательство. Пусть $\alpha \in (0,1)$. По определению строгой вогнутости для любых $0 \leqslant t_1 < t_2$ верно неравенство

$$G(\alpha t_1 + (1-\alpha)t_2) > \alpha G(t_1) + (1-\alpha)G(t_2).$$

Убедимся, что для всех x_1, x_2, удовлетворяющих условию $0 < x_1 < x_2$, выполнено соотношение

$$g(x_1) \equiv \frac{G(x_1) - G(0)}{x_1} > \frac{G(x_2) - G(0)}{x_2} \equiv g(x_2).$$

В самом деле, последнее равносильно неравенству

$$G(x_1) > \frac{x_2 - x_1}{x_2} G(0) + \frac{x_1}{x_2} G(x_2) \equiv \alpha G(0) + (1-\alpha)G(x_2),$$

которое справедливо в силу строгой вогнутости $G(x)$. □

Лемма 2.4. *Функция* $\Phi_2(x)$ *из формулы* (2.2) *убывает на луче* $x > 0$.

Доказательство. Согласно (2.2) и определению функции $F(x)$ (см. лемму 2.2)

$$\Phi_2(x) \equiv \frac{1}{x}\Big(\frac{1}{\Phi_1(x)} - \frac{1}{\Phi_1(0)}\Big) \equiv \frac{F(x) - F(0)}{x}, \quad x \in (-1, +\infty).$$

По лемме 2.2 функция $F(x)$ строго вогнута на луче $x > -1$ (тем более, на луче $x > 0$). Но тогда по лемме 2.3 функция $\Phi_2(x)$ убывает при $x > 0$. □

Доказательство теоремы 1.1. Обе функции $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$ убывают на луче $x > 0$ (см. леммы 2.1, 2.4). Поэтому для всех $x \in (0,1]$

$$\frac{e-2}{e} = \Phi_1(1) \leqslant \Phi_1(x) \equiv \frac{1}{x}(1 - e^{-1}(1+x)^{1/x}) \equiv \frac{H(x)}{x} < \Phi_1(0) = \frac{1}{2},$$

$$\frac{4-e}{e-2} = \Phi_2(1) \leqslant \Phi_2(x) \equiv \frac{e}{e - (1+x)^{1/x}} - \frac{2}{x} \equiv \frac{1}{H(x)} - \frac{2}{x} < \Phi_2(0) = \frac{11}{6}.$$

Следовательно, верны неравенства (1.7) и (1.8). □

Метод доказательства основного утверждения демонстрирует важность соображений монотонности при выводе точных оценок для используемых в анализе чисел и функций (см. также [**5**]).

3. Рациональные приближения числа e

Вопросу о наилучшей скорости рациональных приближений числа e и других специальных чисел посвящено много публикаций (см., например, [**6, 7**]). Покажем, что дают наши результаты в задаче о приближении эйлерова числа элементами конкретной последовательности $(1 + 1/m)^m$, $m \in \mathbb{N}$.

Как доказано в [**2**, теорема 3], ряд (1.2) обертывает функцию $H(x)$ при всех $x > 0$. Другими словами, при каждом $x > 0$ справедлива серия двусторонних оценок

$$\sum_{n=1}^{2p} (-1)^{n-1} a_n x^n < 1 - e^{-1}(1+x)^{1/x} < \sum_{n=1}^{2q-1} (-1)^{n-1} a_n x^n, \quad p, q \in \mathbb{N}.$$

В частности, при $x = 1/m \in (0,1]$ и $q = p + 1$ получим

$$\sum_{n=1}^{2p} \frac{(-1)^{n-1} a_n}{m^n} < 1 - e^{-1}\Big(1 + \frac{1}{m}\Big)^m < \sum_{n=1}^{2p+1} \frac{(-1)^{n-1} a_n}{m^n} \tag{3.1}$$

для всех $m, p \in \mathbb{N}$. Например, взяв $p = 1$, из (3.1) выводим

$$\frac{1}{2m} - \frac{11}{24m^2} < 1 - e^{-1}\Big(1 + \frac{1}{m}\Big)^m < \frac{1}{2m} - \frac{11}{24m^2} + \frac{7}{16m^3}, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{3.2}$$

что дает улучшенную рациональную аппроксимацию числа e

$$\frac{24m^2}{24m^2 - 12m + 11}\Big(1 + \frac{1}{m}\Big)^m < e < \frac{48m^3}{48m^3 - 24m^2 + 22m - 21}\Big(1 + \frac{1}{m}\Big)^m, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Действительно, подставив тестовое значение $m=100$, найдем для e границы

$$\frac{240000}{238811}1.01^{100}=\mathbf{2.71828}06\ldots<e<\mathbf{2.7182818}39\ldots=\frac{48000000}{47762179}1.01^{100}, \tag{3.3}$$

т. е. миноранту с пятью верными цифрами после запятой и мажоранту с семью верными цифрами после запятой, при этом

$$\Big(1+\frac{1}{100}\Big)^{100}=1.01^{100}=\mathbf{2.7}048\ldots$$

справедливо только с одной верной цифрой после запятой.

Отметим, что обвертывание является удобным инструментом для исследования асимптотического поведения гамма–функции [**8**], центрального биномиального коэффициента [**9**], остатков числовых рядов [**10**].

Теорема 1.1 предоставляет другой полезный формат оценок для величины уклонения

$$H\Big(\frac{1}{m}\Big)=1-e^{-1}\Big(1+\frac{1}{m}\Big)^{m}, \quad m\in\mathbb{N}. \tag{3.4}$$

Так, выбирая $x=1/m$ в неравенстве (1.7), приходим к простейшей оценке

$$\frac{e-2}{em}\leqslant 1-e^{-1}\Big(1+\frac{1}{m}\Big)^{m}<\frac{1}{2m}, \quad m\in\mathbb{N}, \tag{3.5}$$

в которой константы $(e-2)/e=0.264\ldots$ и $1/2$ на множестве всех $m\in\mathbb{N}$ неулучшаемы: первая — ввиду равенства в левой части (3.5) для $m=1$, вторая — в силу обвертывания (3.1). Если воспользоваться двойным неравенством (1.8), то возникнет усиливающий (3.5) вариант

$$\frac{1}{2m+\frac{11}{6}}<1-e^{-1}\Big(1+\frac{1}{m}\Big)^{m}\leqslant\frac{1}{2m+\frac{4-e}{e-2}}, \quad m\in\mathbb{N}, \tag{3.6}$$

где выбор констант $11/6=1.8(3)$ и $(4-e)/(e-2)=1.784\ldots$ для заданного шаблона оптимален по тем же причинам, что и в (3.5). Сравнив нижние оценки в (3.2) и (3.6), видим, что вторая всегда лучше. С верхними оценками в (3.2) и (3.6) ситуация иная: первая лучше при всех $m\geqslant 7$, что легко объяснить неасимптотическим характером константы $(4-e)/(e-2)$.

Результат (3.6) улучшает хорошо известное двойное неравенство

$$\frac{1}{2m+2}<1-e^{-1}\Big(1+\frac{1}{m}\Big)^{m}<\frac{1}{2m+1}, \quad m\in\mathbb{N},$$

из классического задачника [**11**, I, гл. 4, § 2].

Для числа e левая часть (3.6) дает при любом $m\in\mathbb{N}$ оценку снизу

$$e>\frac{12m+11}{12m+5}\Big(1+\frac{1}{m}\Big)^{m}.$$

Протестировав ее на прежнем значении $m=100$, запишем

$$e>\frac{1211}{1205}1.01^{100}=\mathbf{2.718281}782\ldots,$$

где шесть верных цифр после запятой демонстрируют небольшое улучшение по сравнению с нижней границей в (3.3).

Еще один способ получения нетривиальных оценок эйлерова числа основан на связи между степенными средними и средними Радо (см. препринт S. Sitnik et al., *arXiv: 2209.02585*). На этом пути можно установить для e (соответственно, для (3.4)) следующие неравенства, справедливые при всех $m\in\mathbb{N}$ и выписанные в порядке увеличения точности:

$$e<\sqrt{\frac{m+1}{m}}\Big(1+\frac{1}{m}\Big)^{m} \iff H\Big(\frac{1}{m}\Big)<\frac{1}{m+\sqrt{m(m+1)}}, \tag{3.7}$$

$$e<\frac{4(m+1)}{(\sqrt{m}+\sqrt{m+1})^2}\Big(1+\frac{1}{m}\Big)^{m} \iff H\Big(\frac{1}{m}\Big)<\frac{2m+3-2\sqrt{m(m+1)}}{4(m+1)}, \tag{3.8}$$

$$e<\Big(\frac{2\sqrt[3]{(m+1)^2}}{\sqrt[3]{m^2}+\sqrt[3]{(m+1)^2}}\Big)^{3/2}\Big(1+\frac{1}{m}\Big)^{m} \iff H\Big(\frac{1}{m}\Big)<1-\Big(\frac{\sqrt[3]{m^2}+\sqrt[3]{(m+1)^2}}{2\sqrt[3]{(m+1)^2}}\Big)^{3/2}. \tag{3.9}$$

Подставив $m = 100$ в (3.7)–(3.9), последовательно находим

$$e < \frac{\sqrt{101}}{10} 1.01^{100} = \mathbf{2.718}304\ldots,$$

$$e < \frac{404}{(10+\sqrt{101})^2} 1.01^{100} = \mathbf{2.71828}743\ldots,$$

$$e < 202\sqrt{\frac{2}{(\sqrt[3]{10000}+\sqrt[3]{10201})^3}}\, 1.01^{100} = \mathbf{2.7182818284}631\ldots,$$

где точность в десять знаков после запятой в последней оценке достигается за счет существенного усложнения ее формата.

Покажем, что подобной высокой точности можно добиться, не меняя выбранного в теореме 1.1 рационального шаблона цепных дробей. Но для этого потребуется доказать одну правдоподобную гипотезу, подтверждаемую численным расчетом.

4. Открытый вопрос

Определим на множестве $x \in (-1, +\infty)$ функциональную последовательность $\Phi_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, следующим образом. Пусть ее первые два элемента Φ_1 и Φ_2 заданы формулами (2.1) и (2.2) соответственно. Пусть

$$\Phi_3(x) \equiv \frac{1}{x}\Big(\frac{1}{\Phi_2(x)} - \frac{1}{\Phi_2(0)}\Big) = \frac{1}{\dfrac{x}{H(x)} - 2} - \frac{6}{11x} = \frac{1}{\dfrac{x}{1 - e^{-1}(1+x)^{\frac{1}{x}}} - 2} - \frac{6}{11x} \tag{4.1}$$

при естественном соглашении

$$\Phi_3(0) = \Big(\frac{a_1}{a_2}\Big)^2 a_3 - a_1 = \frac{5}{242}. \tag{4.2}$$

Затем

$$\Phi_4(x) \equiv \frac{1}{x}\Big(\frac{1}{\Phi_3(x)} - \frac{1}{\Phi_3(0)}\Big) = \frac{1}{\dfrac{x}{\dfrac{x}{H(x)} - 2} - \dfrac{6}{11}} - \frac{242}{5x}; \tag{4.3}$$

по соображениям непрерывности полагаем

$$\Phi_4(0) = \frac{5027}{250}. \tag{4.4}$$

Общее рекуррентное правило зададим в виде

$$\Phi_{n+1}(x) \equiv \frac{1}{x}\Big(\frac{1}{\Phi_n(x)} - \frac{1}{\Phi_n(0)}\Big), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{4.5}$$

с доопределением по непрерывности в точке $x = 0$. Тем самым $\Phi_n(x)$ — элементарная аналитическая функция при $x > -1$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Гипотеза. При любом $n \in \mathbb{N}$ функция $\Phi_n(x)$ из последовательности (4.5) является убывающей на луче $x > 0$.

В леммах 2.1 и 2.4 гипотеза подтверждается для первых номеров $n = 1$ и $n = 2$. Если предположить, что она верна для $n = 3$, то в силу (4.2) для функции (4.1) справедлива двусторонняя оценка

$$\frac{17e - 46}{11(4-e)} = \Phi_3(1) \leqslant \Phi_3(x) < \Phi_3(0) = \frac{5}{242}, \quad x \in (0, 1], \tag{4.6}$$

с границами

$$\frac{17e-46}{11(4-e)} = 0.0149\ldots, \quad \frac{5}{242} = 0.0206\ldots,$$

которую несложно записать в виде

$$\frac{x}{2 + \dfrac{x}{\dfrac{6}{11} + \dfrac{(17e-46)x}{11(4-e)}}} \leqslant H(x) < \frac{x}{2 + \dfrac{x}{\dfrac{6}{11} + \dfrac{5x}{242}}}, \quad x \in (0, 1]. \tag{4.7}$$

В таком случае для уклонения (3.4) из (4.7) следует двойное неравенство

$$\frac{1}{2m+\cfrac{11}{6+\cfrac{17e-46}{(4-e)m}}} \leqslant 1-e^{-1}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m < \frac{1}{2m+\cfrac{11}{6+\cfrac{5}{22m}}}, \quad m\in\mathbb{N}. \tag{4.8}$$

Правую часть (4.8) можно записать в виде

$$e < \frac{264m^2+252m}{264m^2+120m-5}\Big(1+\frac{1}{m}\Big)^m, \quad m\in\mathbb{N}. \tag{4.9}$$

Полагая $m=100$ в (4.9), получим

$$e < \frac{2665200}{2651995}1.01^{100} = \mathbf{2.718281828}651\ldots,$$

с девятью верными цифрами после запятой.

Предположим, что гипотеза верна для $n=4$. Тогда в силу (4.4) для функции (4.3) справедлива двусторонняя оценка

$$\frac{11(1032-379e)}{5(17e-46)} = \Phi_4(1) \leqslant \Phi_4(x) < \Phi_4(0) = \frac{5027}{250}, \quad x\in(0,1], \tag{4.10}$$

которую можно записать в виде

$$\frac{x}{2+\cfrac{x}{\cfrac{6}{11}+\cfrac{x}{\cfrac{242}{5}+\cfrac{5027x}{250}}}} < H(x) \leqslant \frac{x}{2+\cfrac{x}{\cfrac{6}{11}+\cfrac{x}{\cfrac{242}{5}+\cfrac{11(1032-379e)x}{5(17e-46)}}}}, \quad x\in(0,1], \tag{4.11}$$

с теми же, что и в (4.10), константами

$$\frac{5027}{250} = 20.108\ldots, \qquad \frac{11(1032-379e)}{5(17e-46)} = 18.485\ldots,$$

найденными прямым вычислением на основе разложения (1.2). В таком случае для уклонения (3.4) из (4.11) следует двойное неравенство

$$\frac{1}{2m+\cfrac{1}{\cfrac{6}{11}+\cfrac{1}{\cfrac{242m}{5}+\cfrac{5027}{250}}}} < H\Big(\frac{1}{m}\Big) \leqslant \frac{1}{2m+\cfrac{1}{\cfrac{6}{11}+\cfrac{1}{\cfrac{242m}{5}+\cfrac{11(1032-379e)}{5(17e-46)}}}}, \tag{4.12}$$

верное при всех $m\in\mathbb{N}$. Левая часть (4.12) содержит оценку

$$e > \frac{145200m^2+198924m+55297}{145200m^2+126324m+22385}\Big(1+\frac{1}{m}\Big)^m, \quad m\in\mathbb{N}. \tag{4.13}$$

Полагая $m=100$ в (4.13), получим

$$e > \frac{12164857}{12104585}1.01^{100} = \mathbf{2.71828182845}882\ldots,$$

с одиннадцатью верными цифрами после запятой.

Пока неизвестно, справедливы ли опорные соотношения (4.6), (4.10). По всей видимости, подтверждение сформулированной гипотезы в полном объеме требует более тонкого подхода, чем предложенный в доказательстве теоремы 1.1.

Литература

1. А. Б. Костин, В. Б. Шерстюков, “О тейлоровских коэффициентах аналитической функции, связанной с эйлеровым числом”, *Уфим. мат. журн.* **14**, No. 3, 74–89 (2022).
2. А. Б. Костин, В. Б. Шерстюков, “Обвертывание значений аналитической функции, связанной с числом e”, *Мат. заметки* **113**, No. 3, 374–391 (2023).
3. С. В. Конягин, А. Ю. Попов, “О восстановлении функций по значениям n-х разностей с шагом $1/n$”, *Тр. ИММ* **17**, No. 3, 178–185 (2011).
4. Б. М. Макаров, М. Г. Голузина, А. А. Лодкин, А. Н. Подкорытов, *Избранные задачи по вещественному анализу*, Наука, М. (1992).
5. E. A. Karatsuba, “On the asymptotic representation of the Euler gamma function by Ramanujan”, *J. Comput. Appl. Math.* **135**, No. 2, 225–240 (2001).
6. C. S. Davis, “Rational approximations to e”, *J. Austral. Math. Soc., Ser. A.* **25**, 497–502 (1978).
7. Б. Г. Тасоев, “О рациональных приближениях некоторых чисел”, *Мат. заметки* **67**, No. 6, 931–937 (2000).
8. А. Ю. Попов, “Двусторонние оценки гамма-функции на действительной полуоси”, *Чебышевский сб.* **18**, No. 2, 205–221 (2017).
9. А. Ю. Попов, “Новые двусторонние оценки гамма-функции и чисел сочетаний из $2n$ по n. Усиленное обвертывание асимптотическим рядом”, *Мат. заметки* **103**, No. 5, 785–789 (2018).
10. А. Б. Костин, В. Б. Шерстюков, “Асимптотическое поведение остатков числовых рядов специального вида”, *Пробл. мат. анал.* **107**, 39–58 (2020).
11. Г. Полиа, Г. Сеге, *Задачи и теоремы из анализа. I. Ряды. Интегральное исчисление. Теория функций*, Наука, М. (1978).

Статья поступила в редакцию 29 апреля 2024 г.